Megoldások

Pálmay Lóránt tehetségkutató verseny, 2013-14

1. Gombóc Artúr télire 100 csokoládéból álló készletet halmozott fel. A készlet mindegyik darabja tej- vagy étcsokoládé, illetve szögletes vagy kerek. A kerek csokoládék 1/5-e étcsokoládé, míg a szögletes csokoládék 1/4-e tejcsokoládé. A szögletes étcsokoládék száma 30. Hány kerek tejcsokoládéja van Gombóc Artúrnak?

Megoldás:
A szögletes csokoládék számának 3/4 része étcsokoládé, pontosan 30 darab.

Így 40 darab szögletes csokoládét halmozott fel Gombóc Artúr.

Kerek csokiból 100-40=60 van a készletben.

A kerek csokoládék 1/5 része, azaz 12 darab kerek étcsoki.

Ezért 60-12=48 kerek tejcsokija van Gombóc Artúrnak.

2. Tavaly érdekes évszámunk volt: 2013 négy olyan számjegyből áll, amelyeket nagyság szerint rendezve szomszédos számokat kapunk. Hány ilyen tulajdonsággal rendelkező négyjegyű szám van?

Első megoldás
Az évszámban lévő számjegyek lehetséges értékei: 0, 1, 2, 3; vagy 1, 2, 3, 4; vagy 2, 3, 4, 5; …vagy 6, 7, 8, 9. Összesen 7 lehetőség.

Külön kell vizsgálni a 0-t tartalmazó számot, mert 0 nem állhat az ezresek helyén.

A 0, 1, 2, 3 számjegyekből álló szám kezdődhet egyessel, kettessel vagy hármassal. Egyessel kezdődő számokból 6 van: 1023, 1032, 1203, 1230, 1302, 1320. Ugyanígy 6-6 szám kezdődik kettessel vagy hármassal. 18 lehetőség.

Az 1, 2, 3, 4 számjegyekből álló számok bármelyik számjeggyel kezdődhetnek. Egyessel kezdődő számaink: 1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432. Hat megoldást kaptunk. A másik három számjeggyel ugyanígy 6-6-6 szám kezdődik, összesen 24 lehetőség.

A maradék számnégyesekből hasonlóan 24 – 24 szám állítható össze.

Összesen $18+6\cdot 24=162$ -féle négyjegyű szám lehetséges.

Második megoldás
Az évszámban lévő számjegyek lehetséges értékei: 0, 1, 2, 3; vagy 1, 2, 3, 4; vagy 2, 3, 4, 5; …vagy 6, 7, 8, 9. Összesen 7 lehetőség.

Külön kell vizsgálni a 0-t tartalmazó számot, mert 0 nem állhat az ezresek helyén.

A 0, 1, 2, 3 számjegyekből $3\cdot3\cdot2\cdot1=18$ féle számot készíthetünk.

Az 1, 2, 3, 4 számjegyekből $4\cdot3\cdot2\cdot1=24$ féle számot készíthetünk.

A maradék számnégyesekből ugyanígy 24 – 24 szám állítható össze.

Összesen $18+6\cdot24=162$ -féle négyjegyű szám lehetséges.

3. Julcsi a kertjükben termett gyümölcsök súlyát hasonlítja össze egy mérlegen. 2 alma egyensúlyt tart 3 körtével, 1 barack pedig 3 szilvával. Ha az egyik serpenyőbe egy fél dinnyét, a másikba 15 körtét, 4 almát és 6 szilvát teszünk, akkor a mérleg egyensúlyban van. Ehhez hasonlóan egy egész dinnye 40 barackkal és 10 almával tart egyensúlyt. Hány barack súlya egyezik meg 3 körte súlyával?

Megoldás
Ha fél dinnye = 15 körte+4 alma+6 szilva, akkor 1 dinnye = 30 körte+8 alma+12 szilva .

Ha 2 alma = 3 körte, akkor 8 alma = 12 körte, továbbá 10 alma = 15 körte.

Ha 1 barack = 3 szilva, akkor 4 barack = 12 szilva.

Így 1 dinnye = 30 körte+12 körte+4 barack = 42 körte+4 barack.

Mivel 1 dinnye=40 barack+10 alma=40 barack+15 körte,
ezért 42 körte+4 barack=40 barack +15 körte.

Ebből azt látjuk, hogy 27 körte = 36 barack, amiből következik, hogy 3 körte = 4 barack.

A válasz: 4 barack súlya egyezik meg 3 körte súlyával.

Megjegyzés:
Az egyes gyümölcsök súlyának aránya:
szilva : barack : körte : alma : dinnye = 1 : 3 : 4 : 6 : 180

4. Réka és Kinga ikertestvérek, közös születésnapi bulijukra egy-egy süteménnyel várják barátaikat. A süteményt mindketten ugyanabban a 40*cm* x 10*cm* x 5*cm* méretű tepsiben sütik. A kisült tészták megtöltik a tepsit. A lányok a megsült tésztát kiborítják a tepsiből, majd Réka előbb felszeleteli a sajátját, és utána egyenként bevonja mázzal a darabokat, míg Kinga előbb bevonja mázzal az egész sütit, s utána szeleteli fel. A tepsi 40*cm*-es oldalára merőlegesen vágnak. Hány szeletes Réka süteménye, ha éppen háromszor annyi csokimázat használt el, mint Kinga? (A tészta tetejét és oldalait vonják be csokival, az aljára nem kerül máz.)

Megoldás
Kinga sütijén a bevonandó felszín: $10 \cdot 40 + 2 \cdot (10 \cdot 5 + 40 \cdot 5) = 900\, cm^2$.

Réka sütijén 3-szor ennyi, azaz 2700 cm^2 .

A vágási felületeken 2700 – 900 = 1800 cm^2 felületet kell bekenni.

Az $5 \cdot 10 = 50\, cm^2$ -es lapokból ez $\frac{1800}{50} = 36$ darab.

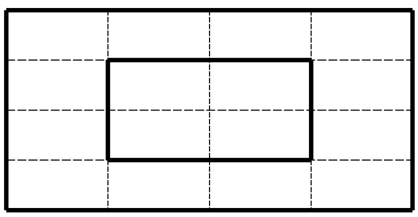
Egy vágás két ilyen lapot eredményez.

Ezért Réka 18-szor vágott.

Így 19 szelet süteményt kapott.

5. Nagyapáék kertje téglalap alakú, közepén unokáiknak kis medencét készítettek, a maradék területet befüvesítették. A medence oldalai feleakkorák, mint a kert oldalai és párhuzamosak velük, hosszukat - méterben mérve - egész számok fejezik ki. Mekkorák lehetnek a kert oldalai, ha a füves rész területe $96m^2$? (A kert oldalai legalább $6m$ hosszúak.)

Első megoldás:
Rajzoljuk le a kert és a medence alaprajzát!



A nagyobbik téglalap oldalait 4 egyenlő részre osztottuk, s a megfelelő pontokat összekötöttük. Ezzel „egység” téglalapokat alakítottunk ki.
A nagy téglalap 16, a kisebbik 4 „egységből” áll, így a medencének megfelelő rész a kertnek megfelelő téglalap negyedét teszi ki, azaz a teljes kert területének egynegyedét foglalja el a medence. Így a füvesített terület a kert ¾ része, vagyis a kert $128m^2$.

Most nézzük meg, mekkorák lehetnek a kert oldalai! Két olyan 5-nél nagyobb egész számot keresünk, amelyek szorzata 128. Menjünk sorba!
Ha az egyik oldal 6 vagy $7m$, akkor a másik nem egész.
A 8 méteres hosszúság esetén kapunk egy megoldás, a másik oldal 16 méter hosszú.
Ha az egyik oldal 9, 10, 11 vagy 12 méter, akkor a másik mérőszáma nem egész.

Tovább nem kell nézni a lehetőségeket, mivel innen „megfordul" a két tényező nagysága. Ha lenne még megoldás, akkor azt már fordított sorrendben véve ezt a két számot, már korábban megkaptuk volna.
Tehát egy megoldás van: a kert oldalai 8 és 16 méteresek.

Ellenőrzés: 8x16=128(m^2) a kert területe. A medence oldalai 4 és 8 méter, területe 32 m^2. A füves rész 128-32=96 négyzetméter. A megoldásunk jó.
(Azt nem ellenőriztük, hogy más megoldás nincsen.)

Második megoldás:
A medence oldalainak a hosszát a-val és b-vel jelöljük. Területe ab.

A kert oldalai $2a$ és $2b$, területe $(2a)\cdot(2b)=4ab$, vagyis a kert területe a medence alapterületének négyszerese. Így a kert ¾ részét füvesítették be, vagyis a kert 128m^2.

A kert oldalainak hosszúsága a terület mérőszámának osztópárja. Mivel $128=2^7$, ezért mindkét oldal csak (5-nél nagyobb) 2-hatvány lehet.
Ha $(2a)=8$, akkor $(2b)=16$, ha $(2a)=16$, akkor $(2b)=8$. Ha $(2a)$ 16-nál nagyobb lenne, akkor a másik oldal 8-nál kisebb, ez pedig nem lehet.

Ellenőrzés az első megoldásnak megfelelően.

6. Egy sportversenyen öt csapat vett részt (*A*, *B*, *C*, *D*, *E*). A csapatok végső sorrendjére ketten tippelnek; tippjeik (az 1. helyezettel kezdve) *ABCDE* illetve *BDEAC*. Az első tippelő pontosan három csapat helyezését találta el, a második pontosan kettőét. Mi volt a verseny végeredménye?

Megoldás:
Mivel a két tippelő minden helyezésre különböző csapatokat jelöl meg, ezért nem lehet közös találatuk. Ez viszont azt jelenti, hogy ketten együtt az összes helyezettet eltalálták: minden helyezésre pontosan az egyikük tippje jött be.

Tehát az első helyen *A* vagy *B*, a második helyen *B* vagy *D* stb. végzett. Induljunk el az első helytől! Ha *A* lett az első, akkor nem lehetett negyedik, vagyis *D* a negyedik. Emiatt a második helyezettre nem *D*, hanem *B* a helyes tipp.

Ezzel az első tippelőnek már megvan a három találata, így a második tippelő szerint a harmadik *E*, az ötödik pedig *C*. A csapatok sorrendje *ABEDC*.

Ha *B* lett volna az első, akkor a második *D*, emiatt a negyedik *A* lenne.

Ekkor azonban a második tippelőnek már három találata van, így ez az eset nem lehetséges.