

Bényei Károly feladatsorai



1.1 Mely valós számokra értelmezhetők a következő kifejezések :

a) $\sqrt{(x - \pi) \sin x}$;

b) $\log_{(x^2-1)}(x^2 - 5x + 6)$?

1.2 Egy derékszögű háromszög befogói 6 cm és 8 cm.

a) Milyen távol van a befogók felezőpontja az átfogótól?

b) Mekkora a beírt kör sugara?

1.3 Oldja meg a következő egyenleteket :

a) $\frac{1}{x}(x^3 - 9x) = 0$;

b) $4^{x+1} + 2 \cdot 2^{x+1} - 8 \cdot 2^x = 0$;

c) $\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 1$.

1.4 Mely valós x értékekre lesznek a $\sin^2 x$, $\sin 2x$, $\cos^2 x$ kifejezések egy számtani sorozat egymás után következő elemei?

1.5 Határozza meg az $x^2 + y^2 = 16$ kör azon érintőjének az egyenletét, amely átmegy a $P(0; 8)$ ponton.

1.6 Egy kör köré írható érintőtrapéz szárainak hossza 3 cm és 5 cm. A trapéz középvonala az adott trapézt két olyan részre osztja, amelyek területének aránya 5 : 11. Mekkora a trapéz párhuzamos oldalai?

1.7 Bizonyítsa be, hogy ha $abc = 1$ és $1 + a + ab \neq 0$, akkor

$$\frac{1}{1 + a + ab} + \frac{1}{1 + b + bc} + \frac{1}{1 + c + ca} = 1.$$

1.8 Hányszor fordul elő az egyes számjegy az $N = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{99\dots9}_{1989 \text{ jegy}}$ szám tízes számrendszerbeli alakjában?

2.1 Oldja meg a következő egyenleteket :

a) $4 \log_x x = \log_x x^4$;

b) $3 \cdot \sqrt{x} = 2^{3+\log_2 24}$;

c) $\frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} + \sin x = \cos x$.

2.2 Három szám, amelyeknek összege 114, egy mértani sorozat első három eleme, de tekinthetők egy számtani sorozat első, negyedik és huszonötödik elemének is. Melyik ez a három szám ?

2.3 Egy háromszög két oldala 5 cm és 3 cm hosszú. A harmadik oldalhoz tartozó súlyvonal 2,2 cm hosszú. Mekkora a harmadik oldal ?

2.4 Ha $2 \lg(x - 2y) = \lg x + \lg y$, akkor mennyi az $\frac{x}{y}$ arány?

2.5 Igazolja, hogy a háromszög bármely belső szögének szögfelezője kisebb, mint a szöget bezáró oldalak mértani közepe !

2.6 Közelítő értékek felhasználása nélkül döntse el, hogy melyik a nagyobb : a 11^{1979} vagy a 37^{1320} ?

2.7 Az $ABCD$ tetraéder A és B csúcsainak a velük szemközti lapok súlypontjára vonatkozó tükörképei legyenek A' és B' . Igazolja, hogy az $A'B'$ szakasz párhuzamos AB -vel és $3 \cdot A'B' = 5 \cdot AB$.

2.8 Egy urnában 67 fehér és piros golyó van. Vannak köztük kicsik és nagyok is. Tudjuk, hogy

- a) a piros golyók száma osztható 5-el;
- b) a nagy piros golyók száma egyenlő a fehér golyókéval;
- c) a legkevesebb a kis fehér golyóból van;
- d) mindegyik fajta golyó száma prím.

Hány golyó van az egyes fajtákból ?

3.1 Oldja meg a következő egyenletet :

$$\frac{x+2}{3} = \frac{x^2+2x-3}{2x^2+2x-12}(x+2)$$

3.2 Egy háromszög két oldala 5 cm és 10 cm. A 10 cm-es oldalhoz tartozó súlyvonal hossza 5 cm. Mekkora a háromszög kerülete és területe ?

3.3 Mely valós számokra értelmezhetők az alábbi kifejezések?

a) $\sqrt{\frac{x-1}{2-x}}$; b) $\operatorname{tg}(\pi \sin x)$; c) $\frac{1}{\lg|x+2|}$.

3.4 Egy paralelogrammát megforgatunk a két szomszédos oldala körül. Határozza meg az így keletkezett forgástestek térfogatának az arányát, mint az oldalak függvényét !

3.5 Oldja meg a következő egyenletet :

$$3^{\frac{1}{2}+\log_3 \cos x} + \sqrt{6} = 9^{\frac{1}{2}+\log_9 \sin x}.$$

3.6 Három szám egy mértani sorozat három egymás utáni eleme. Összegük 26, négyzetük összege 364. Melyik ez a három szám ?

3.7 Egy derékszögű trapéz érintőnégyszög. Párhuzamos oldalai a és c , a rájuk merőleges szár b . Igazolja, hogy

$$b = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}}.$$

3.8 Bizonyos számú veréb röpköd egy fa körül. Ha a fa minden ágán egy veréb ül, akkor n verébnek nincs helye. Ha minden ágra n veréb ül, akkor n ágra nem jut veréb. Hány ága van a fának és hány veréb van ?

4.1 Oldja meg a következő egyenleteket:

a) $x \sin \frac{1}{x} = 0$; b) $\sqrt{1-x} + \sqrt{x-2} = 3$; c) $3^{(3^x)} = 27^{27}$; d) $\log_{\frac{1}{16}} \frac{3x}{2} = -\frac{1}{2}$.

4.2 Egy háromszög a, b, c oldalaira $a^2b^2 + c^4 = b^4 + a^2c^2$. Mutassa meg, hogy a háromszög derékszögű vagy egyenlő szárú.

4.3 Az A, B, C középpontú fogaskerek sugarai 3 cm, 2 cm, 1 cm. A középpontok távolsága $AB = 5$ cm, $BC = 3$ cm, $AC = 5$ cm. (A fogak érintkeznek, magasságuk elhanyagolható.) Ha az A középpontú fogaskerék az óramutató járásának irányában 60° -kal elfordul, akkor milyen irányban és mekkora szöggel fordul el a C középpontú fogaskerék?

4.4 Oldja meg a

$$2a^x = b^x + c^x$$

egyenletet, ha a, b és c olyan pozitív valós számok, amelyekre $c = \sqrt{ab}$.

4.5 Mi azon parabolák csúcspontjainak a halmaza, amelyek egyenlete $y = x^2 + bx + 1$, ahol b befutja a valós számok halmazát?

4.6 Egy négyszög csúcsai $A(2; 0), B(8; 0), C(2; 8), D(0; 4)$.

a) Igazolja, hogy a négyszög húrnégyszög.

b) Mekkora a területe?

4.7 A $\sin^2 x + \sin x + 2^m - 4 = 0$ egyenletben határozzuk meg az m paraméter értékét úgy, hogy az egyenletnek a $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumban egy és csak egy gyöke legyen!

4.8 Hány olyan négyjegyű szám van, amely egyenlő a jegyei fordított sorrendjével felírt négyjegyű számmal? Közülük melyek négyzetszámok?

5.1 Oldja meg a következő egyenleteket: a) $\frac{1+x^2+x^4}{x^2-1} = 7$; b) $\frac{\sin 5x}{1+\cos x} = 0$; c) $\frac{\lg x^2}{\lg x} = 2$.

5.2 Ha egy konvex sokszög belső szögeit egy kivételével összeadjuk, 2570° -ot kapunk. Mekkora a kimaradt szög?

5.3 Az $x^2 + y^2 + 4x - 4y = 18$ egyenletű kör és az $x - y = 2$ egyenletű egyenes metszéspontjaiban a körhöz érintőket rajzolunk. Milyen távolságra van az érintők metszéspontja a kör középpontjától?

5.4 Oldja meg a következő egyenletet:

$$\frac{8^x + 27^x}{12^x + 18^x} = \frac{7}{6}.$$

5.5 Két autó egyszerre indul ugyanarról a helyről ugyanabba az irányba. Az I. sebessége 50 km/h, a II. sebessége 40 km/h. Ugyanonnal utánuk indul fél óra múlva egy harmadik autó, és 1,5 órával később éri utol az I. autót, mint a II. autót. Mekkora a harmadik autó sebessége?

5.6 Az $ABCD A' B' C' D'$ téglatestben $AB = \sqrt{3}$, $BC = 2\sqrt{3}$, $AA' = 3\sqrt{3}$. Húzzuk meg az $AM (M \in BB')$ és az $MN (N \in CC')$ szakaszokat úgy, hogy ezek az $ABCD$ alapsíkkal 30° -os szöget alkossanak és $CN > BM$. Határozza meg az A, M, N pontok által meghatározott síkmetszet területét.

5.7 Az egyenlő szárú ABC háromszögben ($AB = AC$) a szár és alap aránya $5 : 2$. Igazolja, hogy a háromszög súlypontja rajta van a háromszögbe írt körön.

5.8 Mutassa meg, hogy

$$E = \underbrace{99 \dots 9}_{n \text{ db}} \underbrace{00 \dots 0}_{n \text{ db}} 25$$

minden n természetes számra négyzetszám!

6.1 Egy áruház mozgólépcsőjén egy csomag t_1 s alatt ér le az első emeletről a földszintre. Egy vásárló t_2 s alatt teszi meg ugyanezt az utat a nem működő mozgólépcsőn. Mennyi idő alatt ér le ez a vásárló a működő mozgólépcsőn az első emeletről a földszintre, ha közben ugyanúgy lépeget lefelé, mint akkor, amikor nem működött?

6.2 Legyen az ABC háromszög A csúcsánál levő szöge tompaszög, $AB < AC$ és M a BC oldal azon pontja, amelyre $AM = AB$. Igazoljuk, hogy

$$MC \cdot BC = AC^2 - AB^2.$$

6.3 Oldja meg a következő egyenleteket:

$$\text{a) } \log_x 2x + \log_{2x} 4x = \frac{7}{2}; \quad \text{b) } \left(\frac{1}{3}\right)^{2-x} + 3^{x-3} = 99 + \sqrt{\left(\frac{1}{9}\right)^{4-x}}.$$

6.4 Határozza meg azon egyenes egyenletét, amely párhuzamos az ordinátatengellyel és az $A(0; 0)$, $B(1; 1)$, $C(9; 1)$ csúcsú háromszöget két egyenlő területű részre vágja szét!

6.5 1987 db különböző pozitív egész szám összege 3 948 167. Mutassa meg, hogy van közöttük legalább két páros szám!

6.6 Az $ABCD$ téglalapban $AB = 8$, $BC = 6$. A téglalap síkjára az A és C pontokban egy-egy merőlegest állítunk, amelyeken felvesszük az AM , ill. CN szakaszokat úgy, hogy az MDB , ill. NDB sík a téglalap síkjával 30° , ill. 60° -os szöveget alkosson. Határozza meg az **a)** MN szakasz hosszát; **b)** az $MBND$ tetraéder térfogatát!

6.7 Mely valós számokra teljesül :

$$\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x?$$

6.8 Legyen M egy AB átmérőjű körvonal A -tól és B -től különböző pontja, P pedig az M pontból az AB -re bocsájtott merőleges talppontja. A körhöz a B pontban húzott érintő és az AM egyenes metszéspontja legyen C . Milyen arányban osztja a P pont az AB átmérőt, ha az APM háromszög területe egyenlő a $PBCM$ trapéz területével?

7.1 Határozza meg az $x(x - 1)$ kifejezés legnagyobb értékét!

7.2 Egy szimmetrikus trapéz párhuzamos oldalai AB és CD , átlói AC és BD . Az A középpontú AD sugarú kör az AC egyenest M és N pontokban metszi, a CD egyenest pedig a P pontban. Bizonyítsa be, hogy

a) BC párhuzamos AP -vel,

b) $CM \cdot CN = AB \cdot DC$.

7.3 Oldja meg a következő egyenletrendszert, ha $xy > 0$:

$$x^4 + y^4 - x^2y^2 = 13,$$

$$x^2 - y^2 + 2xy = 1.$$

7.4 Milyen valós számokra teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:

a) $2\sqrt{x} + 2\sqrt{1-x} < 2$; b) $9^{x^2} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^x$?

7.5 Írja fel azon körök egyenletét, amelyek az x tengelyt a $(4; 0)$ pontban érintik és érintik az $x^2 + (y - 6)^2 = 4$ egyenletű kört is!

7.6 Bizonyítsa be, hogy ha a, b, c egy háromszög oldalai, akkor a

$$b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$$

egyenletnek nincsenek valós gyökei!

7.7 Az ABC szabályos háromszög alapú és S csúcsú gúla alapélei 18 dm, oldalélei $6\sqrt{6}$ dm hosszúak. Az AB és AC élek felezőpontjain át az SA éllel párhuzamos síkot fektetünk.

a) Számítsa ki a metszet területét.

b) Határozza meg a síkmetszet és a gúla alapsíkja által bezárt szöget.

7.8 Oldja meg a következő egyenletet :

$$[\log_2(x + 3)] - \log_2 x = 1$$

([] egészrészt jelöl).

8.1 Oldja meg a következő egyenleteket : **a)** $5^x \cdot 9^{x-1} = 15^x$; **b)** $1 + \sin 2x = 4 \cdot \sin^2 x$.

8.2 Határozza meg a következő kifejezés számértékét :

$$\log_{\sqrt{\pi}} \pi + \log_{0,1} 100 + 0,0001^{-0,75} + \operatorname{tg} \frac{21\pi}{4}.$$

8.3 Egy háromszög egyik oldala 10 cm, a másik két oldalhoz tartozó súlyvonal 9 cm és 12 cm. Mekkora a háromszög területe?

8.4 Hozza egyszerűbb alakra : **a)** $(1 + \sqrt{3})\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$; **b)** $\frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} + \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha$.

8.5 A k_1, k_2, k_3 körök három különböző pontban páronként kívülről érintik egymást. Kössük össze a k_1 és k_2 körök érintési pontját a másik két érintési ponttal. Igazolja, hogy ezek az egyenesek a k_3 kört egy átmérőjének két végpontjában metszik!

8.6 Oldja meg a következő egyenletet:

$$\sqrt[x]{9} - \sqrt[x]{6} = 2\sqrt[x]{4}.$$

8.7 A p paraméter milyen értéke mellett lesz az

$$x^2 + (3p - 11)x + 2p^2 - 19p + 40 = 0$$

egyenletben a valós gyökök négyzetének összege minimális?

8.8 Egy 8×8 -as sakktáblán hány téglalap látható? Hány négyzet van ezek között?

9.1 Oldja meg a következő egyenleteket:

$$\text{a) } \frac{x^2 - 3x}{27 - 9x} = 0; \quad \text{b) } \sqrt{x+6} - x = 0; \quad \text{c) } \sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

9.2 Egy téglalap egyik átlója az $y = x - 2$ egyenletű egyenesre illeszkedik. Átlóinak metszéspontja $M(7; 5)$, egyik csúcsa $A(0; 4)$ pont. Határozza meg a többi csúcspont koordinátáit.

9.3 Húzzunk az ABC háromszög beírt körének O középpontján keresztül párhuzamost a BC oldallal. Ez az AB oldalt az M , az AC oldalt az N pontban metszi. Határozza meg az AMN háromszög területét, ha $AB=12$, $BC=24$, $AC=18$.

9.4 Mely valós x -ekre teljesül a következő egyenlőség:

$$4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3?$$

9.5 Három éven keresztül minden év elején ugyanazt az összeget tesszük takarékbba évi 5%-os kamatra. A harmadik év után még további két éven át kamatoztatjuk a felgyűlt összeget, és így az 5. év végén 50 000 forintunk lesz. Hány Ft-ot tettünk be évenként?

9.6 Igazolja, hogy egy $\frac{\sqrt{6}}{2}$ élű szabályos tetraéder bármely belső pontjának a lapoktól mért távolságai reciprok értékeinek összege nem kisebb, mint 16.

9.7 Oldja meg a következő egyenletet :

$$[x] = 1 + \{x^2 - 1\},$$

ahol $[]$ egészrészt, $\{ \}$ törtrészt jelent!

9.8 Egy háromszög oldalait belülről érintő kör a, b, c oldalakkal párhuzamos érintőinek a háromszög belsejébe eső szakaszai legyenek rendre a_1, b_1, c_1 . Igazolja, hogy

$$\frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} + \frac{c_1}{c} = 1.$$

10.1 Oldja meg a következő egyenleteket : **a)** $2^{\sin^2 x} = \sin x$; **b)** $3^{2x+1} = 1 + 2\sqrt{1 - 8 \cdot 9^x}$.

10.2 Egy derékszögű háromszög beírható körének sugara 5 cm, az átfogóhoz tartozó magasság 12 cm. Mekkora a háromszög oldalai?

10.3 Az ABC háromszögben a BC oldallal párhuzamos középvonalat a B és C csúcsú szögek szögfelező félegyenesei az M , ill. az N pontban metszik. Igazolja, hogy $AB + AC = BC + 2 \cdot MN$.

10.4 Gyöke-e az $x^3 - 3x - 14 = 0$ egyenletnek az

$$x_1 = \sqrt[3]{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt[3]{7 - 4\sqrt{3}} ?$$

10.5 Milyen valós x -ekre teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$\left| \frac{x+2}{5} \right|^{x^2+x-20} \leq 1 ?$$

10.6 Határozza meg azon körök egyenletét, amelyek egyszerre érintik az

$$x = 0, \quad y = x \quad \text{és az} \quad y = x + 2$$

egyeneseket.

10.7 Legyen P egy O középpontú és AB ívű negyedkör tetszőleges pontja. A P pont merőleges vetülete az OA sugárra Q . Legyen M az OPQ háromszögbe írt kör középpontja.

a) Mutassa meg, hogy $\angle AMP = 90^\circ$.

b) Milyen ponthalmazt ír le az M pont, ha P végigfut a negyedköríven ?

10.8 Igazolja, hogy ha $\log_k x, \log_m x, \log_n x$ ($x \neq 1$) egy számtani sorozat egymás utáni elemei, akkor

$$n^2 = (k \cdot m)^{\log_k m}.$$

11.1 Egy derékszögű háromszög oldalai egy számtani sorozat szomszédos elemei. Az átfogóhoz tartozó magasság 2 cm-el rövidebb a nagyobbik befogó hosszánál. Mekkora a háromszög oldalai?

11.2 A k_1 és k_2 egyenlő sugarú körök az A és a B pontokban metszik egymást. Rajzoljunk A középpontú $r < AB$ sugarú kört. Ez a k_1 kört D -ben, a k_2 kört az E pontban metszi úgy, hogy a D és az E pontok az AB egyenes ugyanazon oldalán vannak. Bizonyítsa be, hogy a D, E, B pontok egy egyenesen vannak.

11.3 Oldja meg a következő egyenleteket :

a) $\log_x 3x = 3$; b) $\frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = 2x + 2$;

c) $x - 4\sqrt{x-1} = 6$; d) $(\sin x - 1)(\operatorname{tg} x - 1) = 0$.

11.4 Az ABC szabályos háromszög oldala $4\sqrt{3}$. A háromszög belsejében levő P pont az AB oldaltól 1, az A csúcstól pedig 3 egység távolságra van. Milyen távolságra van a P pont a másik két csúcstól?

11.5 Bizonyítsa be, hogy ha egy háromszög α, β, γ szögeire $\cos \alpha + \cos \beta = \sin \gamma$, akkor a háromszög derékszögű!

11.6 Legyenek x_1 és x_2 az $x^2 - x + p = 0$ egyenlet gyökei. Határozza meg p értékét úgy, hogy az

$$(x_1^3 + x_2^3)^2 + x_1^2 + x_2^2 = 4p + 2$$

teljesüljön!

11.7 Egy trapéz párhuzamos oldalai 50 cm és 40 cm. Mekkora az a szakasz, amely párhuzamos az alapokkal, és felezi a trapéz területét?

11.8 Legyen u és v pozitív és $u \neq 1, v \neq 1$. Értelmezzük $u \circ v$ -t a következő képpen:

$$u \circ v = \log_u v - \log_v u.$$

Milyen x valós számokra teljesül

$$(a \circ b^x) - (b \circ a^x) = 2(a \circ b)?$$

12.1 Oldja meg a következő egyenletet :

$$x^2 - 4x + 3 + \frac{1}{2x^2 - 8x + 7} = 1.$$

12.2 Három természetes szám szorzata 793 800. Az első számot 5-tel, a másodikat 7-tel, a harmadikat 9-cel szorozva ugyanazt a számot kapjuk. Melyik ez a három szám?

12.3 Az $ABCD$ rombusz oldala 10 cm, BD átlója 12 cm. Az AD oldalon úgy vesszük fel az M pontot, hogy $AM = 2$ cm legyen. Az M pontban $MN = 9,6$ cm hosszú merőlegest állítunk a rombusz síkjára. Számítsa ki **a)** az N pont távolságát az AB egyenestől; **b)** az N, B, C pontok által meghatározott sík és a rombusz síkja által bezárt szöveget.

12.4 Mely valós számokra van értelmezve a következő kifejezés :

$$\log_{4-x} \left(3 - \sqrt{4 - x(4 - x)} \right)?$$

12.5 Legyen az $ABCD$ trapéz ($AB \parallel CD$) érintőnégszög. A beírt körhöz az átellenes A és C csúcsból húzott érintőszakaszok hossza legyen u és v . Igazolja, hogy

$$u \cdot CD = v \cdot AB.$$

12.6 Egy háromszög szögei α, β, γ . Mutassa meg, hogy ha

$$2 \cos \alpha = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta},$$

akkor a háromszög egyenlő szárú.

12.7 Határozza meg azokat az a_1, a_2, a_3, a_4 számtani sorozatot alkotó természetes számokat, amelyekre

$$a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + a_4^3 = 4(a_1 + a_4)^2.$$

12.8 Adva van három egy síkban levő egymással párhuzamos egyenes és az egyiken egy AB szakasz. Csak vonalzó segítségével (távolság nem mérhető vele) kétszerezze meg az AB szakaszt!

13.1 Oldja meg a következő egyenleteket:

$$\text{a) } 2^{\frac{3}{\log_3 x}} = \frac{1}{64}; \quad \text{b) } \frac{\cos 3x}{1 - \sin x} = 0; \quad \text{c) } \sqrt{x^{\lg \sqrt{x}}} = 10.$$

13.2 Valaki egy bizonyos összegnek a takarékbba helyezése után egy évvel kamatként 150 Ft-ot kap. Ekkor betesz még 850 Ft-ot és pénzét további egy évig a takarékbban hagyja, aminek elteltével a kamatokkal együtt 4200 Ft-ot kap kézhez. Hány %-os volt a kamat és hány Ft-ot tett be az illető első ízben a takarékbba?

13.3 Az $ABCD$ négyszögben legyen O_1 az AC átló, O_2 a BD átló felezőpontja. Igazolja, hogy ha $4 \cdot \overrightarrow{O_1 O_2} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}$, akkor a négyszög paralelogramma!

13.4 Határozza meg az $ay - bx = 5a - 4b$ egyenes egyenletében a és b paraméter értékét úgy, hogy az egyenesnek csak egy közös pontja legyen az $y = x^2 - 4x + 5$ egyenletű parabolával!

13.5 Oldja meg a következő egyenletet:

$$9^{1 - \cos 6x} = 3^{\text{tg } 3x}.$$

13.6 Egy számtani sorozatban $a_p = a$, $a_q = b$, $a_r = c$. Mutassa meg, hogy

$$(q - r)a + (r - p)b + (p - q)c = 0.$$

13.7 Oldja meg az egész számok halmazán :

$$\left| \frac{x^2 + y^2}{x + y} \right| = 1.$$

13.8 Az ABC szabályos háromszög belsejében vegyünk fel egy tetszőleges P pontot. P -ből bocsássunk merőlegest az oldalakra. Legyenek ezek talppontjai az AB oldalon D , a BC oldalon E , az AC oldalon pedig F . Határozza meg a $\frac{PD + PE + PF}{AF + CE + BD}$ hányados értékét!

14.1 Egy 60 km/h egyenletes sebességgel haladó személygépkocsi 8 óra 40'-kor érkezik céljához, míg egy 40 km/h egyenletes sebességgel haladó teherautó ugyanazon az útvonalon 9 óra 5'-kor fut be a közös célba. Hány km-rel a cél előtt előzte a személyautó a teherautót?

14.2 Határozza meg egy R sugarú kört érintő szabályos háromszög és a körbe írható szabályos hatszög területének arányát!

14.3 Mely valós x -ekre vannak értelmezve az alábbi kifejezések:

$$\text{a) } \frac{1}{1 - \sqrt{4x^2 - 4x + 1}}; \quad \text{b) } \frac{2x \lg(10x)}{x + \lg x^x}; \quad \text{c) } \frac{1}{1 - \operatorname{tg} x} ?$$

14.4 Oldja meg a következő egyenletet :

$$x^{\lg \operatorname{tg} x} + x^{\lg \operatorname{ctg} x} = 2.$$

14.5 Két egyenlő sugarú kör az A és a B pontban metszi egymást. Húzzunk az A ponton keresztül olyan egyenest, amelynek mindkét körrel van A -tól is és egymástól is különböző C , ill. D metszéspontja. Igazoljuk, hogy az egyenesnek és az AB szakaszra mint átmérőre rajzolt körnek az A -tól különböző metszéspontja felezi a CD szakaszt.

14.6 Négy szám közül az első három egy számtani, az utolsó három pedig egy mértani sorozat három szomszédos eleme. A két szélső szám összege 22, a két középső szám összege 20. Melyik ez a négy szám?

14.7 Milyen tulajdonságú az a háromszög, amelynek szögeire fennáll a következő összefüggés:

$$\sin \alpha = \frac{\sin \beta + \sin \gamma}{\cos \beta + \cos \gamma}.$$

14.8 Hányféleképpen lehet egy 10 fokból álló lépcső tetejére eljutni, ha egyszerre 1 vagy 2 fokot léphetek?

15.1 Egy háromszögben $\gamma = 30^\circ$, $\alpha = m\beta$ és $\beta = n\gamma$, ahol α, β, γ a háromszög szögei, m és n pedig adott természetes számok. Igazolja, hogy a háromszög egyenlő szárú.

15.2 Egy négyzet alapú egyenes hasáb két szemközti oldalélén átmenő síkmetszet területe $12\sqrt{2}$, az alap és fedőlap két szemközti élén átmenő síkmetszet területe pedig 15. Mekkora a hasáb felszíne és térfogata?

15.3 Oldja meg a következő egyenleteket: **a)** $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 6^x + 6^{x+1}$; **b)** $\lg x^{\lg(x^{\lg x})} = \lg x$.

15.4 Az $ABCD$ téglalap egyik oldalegyenesének egyenlete $y = 3x$. Átlói az $M(12; 6)$ pontban metszik egymást. Az AC átló párhuzamos az x tengellyel. Határozza meg a téglalap csúcsainak koordinátáit és a téglalap területét.

15.5 Egy trapéz hosszabbik párhuzamos oldala kétszerese a rövidebbnek és mindkét szárnak is. Bizonyítsa be, hogy a trapéz területe kilencszer nagyobb azon négyszög területénél, amelyet a trapéz szögfelezőinek metszéspontjai határoznak meg.

15.6 Oldja meg a következő egyenletrendszert, ha x és y hegyesszög ívmértéke:

$$\begin{aligned}\sin^3 x &= \frac{1}{2} \sin y \\ \cos^3 x &= \frac{1}{2} \cos y.\end{aligned}$$

15.7 Legyen S_n egy pozitív tagú mértani sorozat első n elemének összege, Q_n pedig az első n elem reciprok értékének összege. Határozza meg az első n elem szorzatát n, S_n és Q_n értékének ismeretében.

15.8 Igazolja, hogy ha egy háromszög a, b, c oldalaira $b^2 + c^2 = 5a^2$, akkor a b és c oldalakhoz tartozó súlyvonalak merőlegesek egymásra!

16.1 Határozza meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a következő kifejezések értelmezhetők: **a)** $\sqrt{\frac{x^2 - 1}{4x - x^2}}$; **b)** $\frac{1}{\operatorname{tg}(\pi \sin x)}$.

16.2 Az ABC háromszög AD súlyvonalával párhuzamosan húzott egyenes az AB, AC, BC egyeneseket rendre az E, F, G pontokban metszi. Bizonyítsa be, hogy

$$AE : AF = AB : AC.$$

16.3 Oldja meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}x^3 - y &= 5x, \\y^3 - x &= 5y.\end{aligned}$$

16.4 Adott az $(m - 2)x^2 - 2mx + 27 = 0$ egyenlet. Legyenek a gyökei x_1 és x_2 . Határozza meg m azon értékeit, amelyekre

$$\frac{x_1 - 1}{x_2 + 1} - \frac{1 - x_2}{1 + x_1} = -\frac{10}{17}.$$

16.5 Három darab $\frac{30}{\pi}$ cm sugarú, henger alakú csövet egymás mellé állítunk úgy, hogy páronként érintsék egymást. Milyen hosszú zsinór kell az összekötésükhöz, ha a csomózáshoz 20 cm-t hagyunk?

16.6 Bizonyítsa be, hogy ha az $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ nullától különböző számok egy számtani sorozat elemei, akkor

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n - 1}{a_1 a_n}.$$

16.7 Egy 2 méter átmérőjű, kör alakú biliárdasztal O középpontjától 0,5 méterre fekvő P pontban van egy biliárdgolyó. A golyót úgy kell ellökni, hogy kétszeri visszaverődés után átmenjen a P ponton, de az O -n nem. Mekkora szöget zár be ez esetben az ellökés iránya a PO szakasszal?

16.8 Az a paraméter mely valós értékei esetén áll fenn minden valós x -re, hogy

$$\log_{\frac{a-1}{a+1}} x^2 + 3 \geq 1?$$

17.1 Egy egyenlő szárú háromszög szárai kétszer olyan hosszúak, mint az alapja. Mekkora a szárok által közrezárt szög szinusza? (Közelítő értékek nélkül.)

17.2 A és B MN távon versenyt fut. Egyszerre indulnak M -ből. A előbb ér N -be, mint B , és N -ből visszafordulva N -től 100 méterre találkozik B -vel. A 4 perccel előbb ér vissza M -be, mint B . Ha A ismét visszafordulna, az MN távolság M -től számított $\frac{1}{5}$ részénél találkozna B -vel. Mekkora A és B sebessége és az MN távolság?

17.3 Oldja meg a következő egyenleteket :

a) $\log_4(12 \cdot 2^x + 1) = -x \cdot \log_9 3;$

b) $\sin 2x - \cos 2x = \sin x + \cos x.$

17.4 Egy derékszögű háromszög átfogójának két végpontja $A(-3; 1), B(5; 3)$. Az egyik befogó egyenesének egyenlete $x + y = 8$. Határozza meg a harmadik csúcspont koordinátáit.

17.5 Egy kör kerületének P pontjából megrajzoljuk az $AP = 18$ cm és $BP = 12$ cm hosszúságú húrokat. Az AP húr F felezőpontjának a BP egyenestől mért távolsága 2 cm. Mekkora a kör sugara?

17.6 Határozza meg az m paraméter értékét úgy, hogy az

$$(m - 1)x^2 - (m^2 + 1)x - 2m^2(m + 1) = 0$$

egyenlet mindkét valós gyöke a $[-1; 1]$ intervallumban legyen!

17.7 Adott az egységnyi élű $ABCD A' B' C' D'$ kocka. Legyen M a BB' és N a BC él felezőpontja.

a) Határozza meg a DMN sík kockába eső metszetének területét.

b) Határozza meg az $ABCD$ és DMN síkok lapszögének tangensét.

17.8 Mutassa meg, hogy az $N = \underbrace{11 \dots 1}_{k \text{ db}} \underbrace{22 \dots 2}_{(k+1) \text{ db}} 5$ szám minden $k \in (0; 1; 2; \dots)$ -ra teljes négyzet!

18.1 Egy háromszög oldalainak a hossza $\frac{\sqrt{6}}{2}$, $\frac{3}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{\frac{3}{2}}$ egység. Számítsa ki a háromszög szögeit és területét.

18.2 Oldja meg a következő egyenleteket:

$$\text{a) } \frac{1}{x}(\lg 1 - \lg 243) + \lg 3^{x-4} = 0; \quad \text{b) } a^{2x} + a^x = a + \sqrt{a} \quad (a > 0).$$

18.3 Mekkora egy 10 cm sugarú félgömbbe írt csonkakúp felszíne és térfogata, ha a csonkakúp alapkörének sugara 10 cm, és az alkotója 60° -os szöget zár be az alapkör síkjával?

18.4 Oldja meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= 19(x + y); \\ x^3 - y^3 &= 7(x - y). \end{aligned}$$

18.5 Legyen az ABC háromszög A csúcsánál levő szöge 90° . Befogói: $AB = 4a$, $AC = 3a$. Állítsunk A -ban a háromszög síkjára egy merőlegest, és vegyünk fel ezen egy S pontot úgy, hogy $AS = 4a$ legyen! **a)** Határozza meg az SBC háromszög területét! **b)** Határozza meg A pont távolságát az SBC síktól!

18.6 Az $x^2 + px + q$ kifejezésben

$$p = \sin \alpha + \cos \alpha, \quad q = \frac{1}{4\sqrt{3}} \cos 2\alpha.$$

Határozza meg az α értékét úgy, hogy az $x^2 + px + q$ kifejezés teljes négyzet legyen!

18.7 Adott az $x^2 + (y - a)^2 = a^2$ egyenletű kör. Húzza meg az x tengelyen mozgó P pontból azt az egyenest, amely a kört az origótól különböző Q pontban érinti. Határozza meg az OPQ háromszögek (O az origó) magasságpontjainak halmazát, ha P végigfut az x tengelyen!

18.8 Mely valós x -re teljesül:

$$x^{\log_4(x+2) - \log_2 x} < 1 ?$$

19.1 Oldja meg a következő egyenletet :

$$(x - 1)(x - 2)(x - 3) = (2x - 1)(2x - 2)(2x - 3).$$

19.2 Egy derékszögű háromszög átfogójához tartozó magassága 6 cm, a derékszög szögfelezője 7 cm. Mekkora a háromszög oldalai ?

19.3 Határozza meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az alábbi kifejezések értelmezhetők: **a)** $\lg(x^3 + x^2 - 2x)$; **b)** $\frac{1}{\operatorname{ctg}(\pi x)}$; **c)** $\log_{0,1}(1 - x^2)$.

19.4 Milyen egész értékeket vehet fel az m , ha tudjuk, hogy az

$$\begin{aligned} x + 3y &= 12, \\ 21x + 62y &= m \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldásaként adódó számok nem negatívak?

19.5 Egy háromszög két oldala 10 cm és 15 cm, a hozzájuk tartozó magasságok összege pedig egyenlő a harmadik magassággal. határozza meg a harmadik oldalt!

19.6 Bizonyítsa be, hogy ha egy számtani sorozat első n tagjának összege n^2p , első k tagjának összege k^2p , ($n \neq k$) akkor az első p tag összege p^3 .

19.7 Oldja meg a következő egyenletet :

$$\operatorname{tg} x + \frac{\cos x}{1 + \sin x} = 2.$$

19.8 Adva van egy 1500 oldalú konvex sokszög és belsejében 500 pont úgy, hogy a sokszög csúcsai és az 500 pont közül semelyik három nincs egy egyenesen. Felhasználva a sokszög csúcsait és az 500 pontot, bontsuk fel a sokszöget olyan háromszögekre, amelyeknek csúcsai az előbbi 2000 pont közül valók. Hány ilyen háromszöget kapunk?

20.1 Oldja meg a következő egyenleteket: **a)** $\left(\frac{4}{9}\right)^x \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{\lg 4}{\lg 8}$; **b)** $|3x - 2| + x = 2$.

20.2 Bizonyítsa be, hogy bármely háromszögben a derékszög felezője felezi az átfogóhoz tartozó magasság és súlyvonal által bezárt szöget is!

20.3 Oldja meg a következő egyenletet:

$$\sqrt{2} \sin x + \sin 2x + \cos 2x = 1.$$

20.4 Az A gép termelése a B és C gépek együttes termelésének 30%-a. A B gép termelése az A és C gépek együttes termelésének 40%-a. Hány %-a a C gép termelése az A és B gépek együttes termelésének?

20.5 Igazolja, hogy a derékszögű trapéz átlói akkor és csak akkor merőlegesek egymásra, ha a merőleges szár mértani közepe a párhuzamos oldalaknak!

20.6 Határozza meg a sík azon pontjait, amelyekből az $x^2 + y^2 + 2x = 8$ és az $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$ körökhöz húzott érintők 6 egység hosszúak!

20.7 Egy háromszög oldalai szomszédos egész számok. A legnagyobb szög kétszerese a legkisebbnek. Mekkora az oldalak?

20.8 Egységnyi oldalú négyzet belsejében van 9 különböző pont. Bizonyítsa be, hogy van köztük 3 olyan, amelyek által meghatározott háromszög területe kisebb, mint $\frac{1}{8}$ területegység!

21.1 Az ABC háromszögben $AB+BC = 8\sqrt{3}$, a BC oldalhoz tartozó magasság 3 és a $B\hat{A}C = 60^\circ$. Mekkora az AC oldal?

21.2 Oldja meg a következő egyenleteket:

a) $\lg^2 x + \lg(x+4)^2 = 2 \cdot \lg 3$;

b) $(1 - \cos 2x)^2 + (1 + \sin 2x)^2 = 1$.

21.3 Határozza meg azon kör egyenletét, amely az abszcisszatengelyt az $E(4; 0)$ pontban érinti és érinti az $y = \sqrt{3} \cdot x$ egyenest is!

21.4 Egy erdő faállománya 3500 cm^3 . Évente 3%-kal gyarapszik, kétévente 2%-át kivágják. Hány m^3 lesz az állomány 20 év múlva?

21.5 Az ABC háromszögben $BC > AB$. A BC oldalon vegyünk fel egy D pontot úgy, hogy $CD = AB$ legyen. Jelöljük E -vel az AD szakasz, P -vel a BC szakasz felezési pontját. Bizonyítsa be, hogy az $ABC\hat{A}$ szögfelezője merőleges az EP egyenesre.

21.6 Az α mely értékeire valósak a

$$(2 \cos \alpha - 1)x^2 - 4x + 4 \cos \alpha + 2 = 0$$

egyenlet gyökei? A kapott α értékekre milyen előjelűek a gyökök?

21.7 Kiválaszthatók-e az $M = \{1, 2, 3, \dots, 99, 100\}$ halmaz elemei közül olyanok, amelyek összege 1989, és a szorzatuk osztható 10^{24} -nel?

21.8 Egységnyi területű derékszögű háromszögek közül melyikben a legnagyobb a beírt kör sugara?

22.1 Egy számtani sorozat első tíz elemének összege 155. Ezek közül a páros sorszámú elemek összege 85. Határozza meg a sorozat első három elemét.

22.2 Milyen előjelű a következő kifejezés:

$$x = \sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}} - \sqrt{2}?$$

22.3 Az ABC derékszögű háromszög AB átfogójának F felezési pontjában merőlegest állítunk az átfogóra. Ez a befogók egyenesét az E , ill. a D pontban metszi. Bizonyítsa be, hogy $FE \cdot FD = FC^2$.

22.4 Egy áru árát kétszer egymás után az előző ár 20%-ával csökkentették, így a tiszta haszon a felére csökkent. Az előállítási ár hány %-a volt eredetileg a haszon?

22.5 Oldja meg a következő egyenleteket:

$$\text{a) } x^{2 \lg x} = 10x; \quad \text{b) } \frac{\sin x}{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} + \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos x} = 0.$$

22.6 Egy mértani sorozat első eleme 2, az első néhány elem összege 62. Ugyanezen elemek reciprok értékeinek összege 0,62. Határozza meg a sorozat második elemét.

22.7 Bizonyítsa be, hogy ha egy háromszög α , β , γ szögeire $\alpha = 2\beta = 4\gamma$, akkor $a^2 = c(a + b + c)$.

22.8 Adott az $y^2 = x$ parabola és az $x^2 + y^2 - x = 0$ kör. Határozza meg az origón átmenő d egyeneseknek a körrel és parabolával való, az origótól különböző metszéspontjaiban a görbékhez húzott érintők metszéspontjainak halmazát.

23.1 Oldja meg a következő egyenleteket:

a) $\frac{\lg(x^2-5x+7)}{\lg(4-x)} = 0$; b) $\cos(\pi \sin x) = 0$.

23.2 Milyen háromszög oldalaira teljesül az

$$a^3 + a^2c + b^3 + bc^2 = a^2b + ab^2 + b^2c + ac^2 + c^3$$

összefüggés?

23.3 Határozza meg annak a körnek az egyenletét, amely átmegy az

$$x^2 + y^2 = 25 \text{ és az } x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$$

körök középpontján és középpontja az abszcisszatengelyen van.

23.4 Három pozitív szám egy mértani sorozat három szomszédos eleme. Ha a másodikhoz hozzáadunk négyet, egy számtani sorozat három egymás utáni elemét kapjuk. Végül, ha a harmadikat 32-vel növeljük, ismét egy mértani sorozat három szomszédos elemét kapjuk. Melyik ez a három szám?

23.5 Mekkora annak a háromszögnek a szögei, amelynek a, b, c oldalaira

$$(b^2 + c^2)(2a^2 - b^2 - c^2) = a^2(a^2 + 1) + 4b(b - a)?$$

23.6 Bizonyítsa be, hogy minden derékszögű háromszögben a beírt kör átfogón levő érintési pontja két olyan részre osztja az átfogót, amelyek szorzata egyenlő a háromszög területével.

23.7 Oldja meg a következő egyenletet:

$$9^x - 6^x = 2^{x-2} (9 \cdot 2^{x-2} + \sqrt{6^{x+2}}).$$

23.8 Bizonyítsa be, hogy ha $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$1^n + 2^n + 3^n + 4^n$$

akkor és csak akkor osztható 5-tel, ha n nem osztható 4-gyel.

24.1 Mely valós x -ekre értelmezhetők a következő kifejezések:

a) $\sqrt{2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 2}$; b) $\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2-2x}}$.

24.2 Egy a oldalú szabályos háromszögbe írjunk olyan szabályos hatszöget, amelynek csúcsai a háromszög oldalaira esnek. Hány %-a a hatszög területe a háromszög területének?

24.3 Oldja meg a következő egyenleteket:

a) $x^2 + 4x + 4 = 3|x + 2|$; b) $\operatorname{tg} 3x = \sin 6x$.

24.4 10%-os árleszállítás után egy könyv eladásán 8% a haszon. Hány %-os volt a könyvesbolt haszna az árleszállítás előtt?

24.5 Oldja meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}xy &= y^x \\x^3 &= y^2\end{aligned}$$

24.6 Egy háromszög egyik oldalát a hozzá tartozó magasság egy 4 cm-es és egy 9 cm-es szakaszra osztja. A háromszög ezen oldalon fekvő két szögének az aránya 1:2. Mekkora a háromszög területe?

24.7 Határozza meg a $\cos^2 \alpha x^2 - x + \sin^2 \alpha = 0$ egyenletben α értékét úgy, hogy az egyenlet gyökeinek négyzetösszege 10 legyen!

24.8 Írja fel azoknak a $P(2; 3)$ ponton átmenő egyeneseknek az egyenletét, amelyeknek a

$$3x + 4y - 7 = 0 \text{ és } 3x + 4y + 8 = 0$$

egyenesek közé eső szakaszát az x tengelyre vetítve egységnyi hosszúságú vetületet kapunk.

25.1 Írja fel a $P(3; 1)$ ponton átmenő azon egyenes egyenletét, amely a koordináta-tengelyek pozitív ágával 8 egységnyi területű háromszöget határol.

25.2 Egy háromszög két súlyvonala 6 cm és 9 cm, az általuk bezárt szög 75° . Mekkora a háromszög területe?

25.3 Legyen az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény a következő: bármely x értékre $f(x)$ legyen az x -nek a $[0; 2]$ intervallum legtávolabbi egész értékétől való távolsága. Ábrázolja és írja fel az $f(x)$ függvényt képlettel.

25.4 Mely x -ekre értelmezhető a $\sqrt{\sin x + \cos 2x}$ kifejezés?

25.5 Egy 3 millió forint forgalmú kereskedelmi vállalat forgalma kétszer növekedett, a második alkalommal kétszer annyi százalékkal, mint az első alkalommal. Hány %-kal nőtt a forgalom másodszer, ha utána 4 485 000 Ft lett?

25.6 Az ABC háromszögben $AB = 2AC$. Hosszabbítsuk meg a BC oldalt $1/3$ részével a C ponton túl. Így kapjuk a D pontot. Bizonyítsa be, hogy $AD = 2CD$.

25.7 Az $ABCDES$ ötszög alapú szabályos gúlát elmetsszük egy síkkal, amely átmegy az alap A és C csúcán, továbbá az ES oldalél felezőpontján. Számítsa ki a síkmetszet területét, ha a gúla alapéle a , oldaléle b .

25.8 Milyen a értékekre van a következő egyenletrendszernek valós megoldása:

$$\begin{aligned}x^3 + y^3 + 3xy &= a, \\x + y &= xy?\end{aligned}$$

26.1 Egy szabályos háromszög egyik csúcsa $A(1; 0)$, súlypontja $S(3; 2\sqrt{3})$. Határozza meg a másik két csúcspont koordinátáit.

26.2 Oldja meg a következő egyenleteket:

a) $\frac{x-4}{\sqrt{x}+2} = x-8$;

b) $\log_4(x+12) \log_x 2 = 1$;

c) $\sin\left(\frac{\pi}{2} \cos x\right) = 1$.

26.3 Egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magassága 20, a szárhoz tartozó magassága 24. Mekkora a háromszögbe és a háromszög köré írt kör sugara?

26.4 Oldja meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}x^2 &= y + 6, \\y^2 &= x + 6.\end{aligned}$$

26.5 Egy a élhosszúságú szabályos tetraéder egyik élén át olyan síkot fektetünk, amely a vele kitérő élt 2:1 arányban osztja. Határozza meg a keletkezett síkmetszet területét.

26.6 Egy mértani sorozat páros számú tagból áll. Ha minden tagot összeadunk, az összeg háromszor akkora lesz, mint amikor csak a páratlan sorszámú tagokat adjuk össze. Mekkora a sorozat hányadosa?

26.7 Két szám összege 216, legnagyobb közös osztójuk pedig 24. Melyik ez a két szám?

26.8 Adott két párhuzamos egyenes és az egyiken egy kijelölt szakasz. Egyetlen vonalzó segítségével, amellyel csak egyenes vonal húzható, szerkessze meg a szakasz felezőpontját.

27.1 Oldja meg a következő egyenleteket:

$$\text{a) } \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x^2} = 3; \quad \text{b) } \sin 4x + \cos^2 2x = \sin^2 2x.$$

27.2 Az ABC háromszög AB oldalegyenesének egyenlete

$$5x + y = 11,$$

az AC oldal egyenlete

$$x - y + 5 = 0,$$

a háromszög súlypontja $S(1; 4)$. Határozza meg a háromszög csúcspontjainak koordinátáit.

27.3 Az ABC háromszög C csúcsánál levő szöge derékszög. Egy belső P pontját a csúcsokkal összekötve a keletkezett PAB , PAC és PBC háromszögek területe egyenlő. Mekkora a PC távolság, ha $PA^2 + PB^2 = 20$?

27.4 Oldja meg a következő egyenletet:

$$\left(\log_9(4x^2)\right)^2 - 10 \cdot \log_9 18x + 4 = 0.$$

27.5 Egy háromszög két oldala 5 cm és 10 cm. A 10 cm-es oldallal szemközti szög háromszor akkora, mint az 5 cm-es oldallal szemközt fekvő szög. Mekkora a háromszög szögei?

27.6 Határozza meg azt az n természetes számot, amelyre

$$7 + 19 + 37 + \dots + (3n^2 + 3n + 1) = 10\,303n.$$

27.7 Legyen az $ABCD$ négyzet AC átlójának egy tetszőleges belső pontja E , az EB oldalú négyzet átlója pedig BF . Bizonyítsa be, hogy az AE , EC , BF szakaszokból szerkeszthető háromszög.

27.8 Oldja meg a következő egyenletet:

$$8 \cos x = \frac{\sqrt{3}}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}.$$

28.1 Két egymást követő, ugyanolyan százaléku árcsökkentés után egy fényképezőgép ára 6000 Ft-ról 4335 Ft-ra csökkent. Hány százalékkal csökkent a gép ára az egyes árcsökkentéseknél?

28.2 Egy R sugarú körbe írt ABC háromszögben $AB = \frac{R}{2}$ és $AC = R\sqrt{3}$. Mekkora a BC oldal?

28.3 Az a paraméter milyen pozitív értékére pozitív a következő egyenlet gyöke?

$$\frac{4a + 1}{x - 2} = 3 - 2a$$

28.4 Adottak az $A(-7; 1)$ és a $B(-5; 5)$ pontok. Határozza meg az $y = 2x - 5$ egyenletű egyenesnek azt a P pontját, amelyre $PA + PB$ minimális.

28.5 Oldja meg a következő egyenletet:

$$\sin x + \cos x = \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}.$$

28.6 Bizonyítsa be, hogy a szabályos tetraéder bármely belső pontjának a határoló lapoktól mért távolságainak összege egyenlő a test magasságával.

28.7 Oldja meg a következő egyenletrendszert:

$$\frac{xyz}{x + y} = 2, \quad \frac{xyz}{y + z} = \frac{6}{5}, \quad \frac{xyz}{z + x} = \frac{3}{2}.$$

28.8 Egy konvex sokszög szögei rendre az $\alpha; \frac{3}{2}\alpha; 2\alpha; \frac{5}{2}\alpha \dots$ számtani sorozat egymást követő elemei. Mekkora az α értéke ezek közül arra a sokszögre, amelynek a lehető legtöbb oldala van?

29.1 Oldja meg a következő egyenleteket:

a) $\sin 7x = \sin 5x$; b) $\sqrt{x+3} = -x - 4$; c) $x^{\log_2 x} = 4x$.

29.2 Egyenlő szárú derékszögű háromszög egyik 10 cm-es befogóján a derékszög csúcsától 3 cm-re felveszünk egy P pontot. Ennek távolsága az átfogó egy Q pontjától ugyanakkora, mint a Q távolsága a másik befogótól. Mekkora ez a távolság?

29.3 Határozza meg a $\operatorname{ctg} x$ értékét, ha

$$\frac{4,5 \sin x + 3}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}.$$

29.4 Egy sík lapú asztalon fekvő négy golyó mindegyike érinti a másik hármat és az asztalt is. Háromnak a sugara R . Mekkora a negyediké?

29.5 Határozza meg annak a parabolának az egyenletét, amelynek tengelye az abszcisszatengely, csúcsa a $(8; 0)$ pont és érinti az $x^2 + y^2 = 16$ egyenletű kört.

29.6 Az egész számok sorozatából valamelyik számtól kezdve minden nyolcadik számot kivesszük addig, amíg a kivett számok összege 473 lesz. Melyik számot vettük ki először és hány számot vettünk ki?

29.7 Ha $ab = 1$ és $ac + bd = 2$, akkor bizonyítsa be, hogy $cd \leq 1$ (a, b, c, d valós).

29.8 Adott egy ABC háromszög és körülírt köre. Legyen g olyan egyenes, amely párhuzamos az adott kör A pontban húzott érintőjével és a háromszög AB és AC oldalát a belső D és E pontban metszi. Igazolja, hogy a $BCDE$ négyszög húrnégyszög.

30.1 Határozza meg az alábbi kifejezések számértékét!

a) $\sqrt{100^{\lg(1-\cos\frac{4\pi}{3})}}$;

b) $\operatorname{tg} 15^\circ \cdot \cos^2 15^\circ$;

c) $\log_\pi \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \operatorname{tg} \left(-\frac{7\pi}{4}\right) + 2^{\log_4 9}$.

30.2 Derékszögű trapéz nem hosszabbik átlója a trapézt két egyenlő szárú háromszögre bontja. A trapéz magassága 5 egység. Mekkora lehetnek a trapéz oldalai?

30.3 Három csoport sporthorgász egy versenyen 113 halat fogott. Az I. csoport tagjai átlagosan 13, a II. csoport tagjai átlagosan 5, a III. csoporté pedig átlagosan 4 halat fogtak. Hányan voltak az egyes csoportokban, ha összesen 16 horgász vett részt a versenyen?

30.4 Oldja meg a következő egyenleteket:

a) $3 \cdot \log_8(x-1) + 2 \cdot \log_4(x+3) = 2^{x+3} \cdot \log_2(x^2 + 2x - 3)$;

b) $6^{2x+4} = 2^{x+8} \cdot 3^{3x}$;

c) $\frac{1 + \cos 3x}{\sin 3x} = 0$.

30.5 Határozza meg azon egyenes egyenletét, amely átmegy a $P(4; 1)$ ponton és tengelymetszeteinek összege 9.

30.6 Az $ABCD$ tetraéderben $DA = DB = DC = a$. $\sphericalangle ADB = 60^\circ$, $\sphericalangle BDC = 120^\circ$, $\sphericalangle CDA = 90^\circ$. Határozza meg a tetraéder felszínét.

30.7 Egy számtani sorozat első n elemének összege b , első $2n$ elemének összege pedig c . Fejezze ki b -vel és c -vel az első $3n$ elem összegét.

30.8 Melyek azok a természetes számok, amelyekkel a 45 360-at elosztva hányadosul egy pozitív egész szám harmadik hatványát kapjuk, és a maradék 0?

31.1 Mennyi vizet kell önteni 20 liter 80%-os sóoldathoz, hogy 50%-os oldatot kapjunk?

31.2 Egy derékszögű háromszög befogói 15 és 20 cm hosszúak. Az átfogóhoz tartozó magasság a derékszöget két részre osztja. Ezen szögek szögfelezői az átfogót a P , ill. Q pontban metszik. Határozzuk meg a PQ szakasz hosszát.

31.3 Oldja meg a következő egyenleteket:

a) $\log_2(x+1) + \log_{(x+1)} 2 = \frac{5}{2}$;

b) $a^{x+3} - a^{7-x} = 0 \quad (a > 0)$;

c) $\sin(\pi \cos(x\pi)) = 1$.

31.4 Igazolja, hogy a háromszög súlyvonalainak összege kisebb, mint a kerülete, de nagyobb, mint a terület $\frac{3}{4}$ része.

31.5 Egy háromszög egyik oldala 1, a rajta fekvő két szög 45° és 120° . Forgassuk meg a háromszöget az egységnyi oldala körül. Mekkora az így keletkezett forgástest térfogata?

31.6 $(a+1)x^2 + (2a-4)x + 6 = 0$.

a) Az a paraméter mely értékénél lesz $x_1 + x_2 = 0$?

b) Az a paraméter mely értékénél lesz

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 2?$$

31.7 Oldja meg a következő egyenletrendszert:

$$x + \sqrt{y} = 1 \text{ és } y + \sqrt{x} = 1.$$

31.8 Határozza meg a következő összeget:

$$\lg(2 \operatorname{tg} 1^\circ) + \lg(2^3 \operatorname{tg} 3^\circ) + \lg(2^5 \operatorname{tg} 5^\circ) + \dots + \lg(2^{89} \operatorname{tg} 89^\circ).$$

32.1 Ha egy kétjegyű természetes számot osztunk számjegyeinek szorzatával, akkor a hányados 5, a maradék 2. Melyik ez a kétjegyű szám?

32.2 Egy trapéz két párhuzamos oldala 12, ill. 8 cm hosszú. A trapéz átlói a 12 cm-es oldallal 45° , ill. 30° -os szöget zárnak be. Mekkora a trapéz területe?

32.3 Milyen valós x -ekre értelmezhetők a következő kifejezések:

a) $\lg\left(\frac{6+x-x^2}{x+5}\right) + \sqrt{2-x}$;

b) $\sqrt{2\sin^2 x - \cos x}$?

32.4 Az ABC háromszög B csúcsánál levő szög szögfelező félegyenesére C -ből bocsátott merőleges talppontja legyen T . Bizonyítsa be, hogy a T ponton átmenő AB oldallal párhuzamos egyenes átmegy az AC és BC oldalak felezőpontján.

32.5 Oldja meg a következő egyenleteket:

a) $\log_4(\log_2 x) + \log_2(\log_4 x) = 2$;

b) $\frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} + \frac{\operatorname{tg}(x + \pi)}{1 - \operatorname{tg} x}$.

32.6 Adott két párhuzamos egyenes és közöttük az egyik egyenestől a , a másiktól b távolságra egy P pont. Tekintsük az olyan P csúcsú derékszögű háromszögeket, amelyeknek a két hegyesszögű csúcsa a két párhuzamos egyenesen van. Ezen derékszögű háromszögek közül melyiknek a legkisebb a területe és mekkora ez a terület?

32.7 Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy $P(2; 1)$ ponton, és az $x - y + 5 = 0$, valamint az $x - y = 2$ egyenesek közé eső szakasza 5 egység.

32.8 Bizonyítsa be, hogy egy $2n$ jegyű, csupa egyesből álló, és egy n jegyű, csupa kettesből álló természetes szám különbsége négyzetszám. ($n > 0$ egész)

33.1 Egy háromszög két oldala 5 cm és 8 cm hosszú, területe 12 cm^2 . Mekkora a harmadik oldala?

33.2 Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}x(x + 3y) &= 34, \\y(y - 5x) &= -25\end{aligned}$$

33.3 Oldja meg a következő egyenletet:

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1 - \cos x}{1 - \sin x}.$$

33.4 Egy trapéz két párhuzamos oldala a és b ($a > b$), és az a oldalon fekvő két szöge hegyesszög. Forgassa meg a trapézt két párhuzamos oldala körül. Határozza meg a keletkezett forgástestek térfogatának arányát a és b függvényében.

33.5 Bizonyítsa be, hogy ha egy háromszög magasságai m_a , m_b , m_c , a beírt kör sugara pedig ϱ , akkor

a) $\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} = \frac{1}{\varrho};$

b) $m_a + m_b + m_c \geq \varrho.$

33.6 Oldja meg a következő egyenletet:

$$\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}} = 1.$$

33.7 Legyen H az $ABCD$ négyzet BC oldalának a B ponthoz közelebbi harmadolópontja, F pedig a DC oldal C ponton túli – a négyzet oldalának felével való – meghosszabbításának végpontja. Igazolja, hogy az AH és a BF egyenesek metszéspontja rajta van négyzet köré írt körén.

33.8 Egy $2n \times 2n$ -es sakktábla mezőin $3n$ bábu van elhelyezve. Bizonyítsa be, hogy a sakktábláról elhagyhatunk n sort és n oszlopot úgy, hogy a megmaradt részen egyetlen bábu se legyen.