

# Matematika tanterv

## Speciális matematika tagozat

### 7-12. évfolyam

#### Általános szerkezet

A tanterv két fő részből áll:

- I. az emelt szintű érettségi követelményekben szereplő tananyag,
- II. az érettségi szintjét meghaladó speciális matematika tagozatos tananyag.

A II. rész három különböző típusú modult tartalmaz, melyek közül az egyes csoportok tudásszintjének, érdeklődésének megfelelően lehet választani:

**A modul:** A matematika tagozaton minden csoportban *kötelező* elvégezni, ütemezésük a csoport képességétől függ.

**B modul:** Haladó témák, az egyes csoportok tudásszintjének, érdeklődésének megfelelően *lehet* közülük választani.

**C modul:** Olyan témák, amelyek nem a matematika egy ágához kötve jelennek meg, hanem mint "gyakorlati" problémák, alkalmazási területek. Évente legalább egy ilyen modul elvégzése *kötelező*.

A tanterv alapvetően spirális felépítésű, ezért is tér vissza a legtöbb téma mindegyik évfolyamon, természetesen magasabb évfolyamon mélyebb szinten.

A tantervben felsorolt anyag teljes egészét nem kell (és nem is lehetne) megtanítani. A bőséges modul-lista azt kívánja elősegíteni, hogy minden tanulócsoport képességeinek és érdeklődésének megfelelő anyagot tanulhasson. Tehát a kötelező (I.-es típusú) részeken felül tanított modulok esetében *az elmélyülés, alapos megértés és önálló gondolkodás fontosabb, mint a megtanított anyag mennyisége.*

# Időkeretek, ütemezés

## óraterv

### 7. osztály (heti 7 óra, összesen 252 óra)

Halmazok 1.	10
Kombinatorika 1.	20
Gráfelmélet 1.	10
Számelmélet 1.	30
Számfogalom 1.	15
Algebra 1.	25
Függvények, analízis 1.	25
Geometriai szemléletfejlesztés	10
Geometria 1.	20
Geometria 2.	15
Geometria 3.	20
Geometria 4.	15
A modul:	15
C modul:	10
Verseny felkészítés:	12
	252

### 8. osztály (heti 7 óra, összesen 252 óra)

Logika 1.	10
Gráfelmélet 2.	15
Számelmélet 2.	25
Számfogalom 2.	25
Algebra 2.	30
Függvények, analízis 2.	25
Valószínűségszámítás 1.	15
Geometria 5.	15
Geometria 6.	20
Geometria 7.	10
Analitikus geometria 1.	25
C modul:	10
Verseny felkészítés:	10
Rendszerezés (vizsgára készülés):	17
	252

### **9. osztály (heti 7 óra, összesen 252 óra)**

Halmazok 2.	10
Kombinatorika 2.	20
Számelmélet 3.	15
Számfogalom 3.	10
Algebra 3.	25
Sorozatok, analízis 3.	20
Trigonometria 1.	15
Geometria 8.	20
Geometria 9.	20
Analitikus geometria 2.	15
Statisztika 1.	10
A/B modul:	40
C modul:	20
Verseny felkészítés:	12
	252

### **10. osztály (heti 6 óra, összesen 216 óra)**

Algebra 4.	20
Algebra 5.	15
Sorozatok, analízis 4.	15
Függvények, analízis 5.	15
Trigonometria 2.	20
Trigonometria 3.	15
Analitikus geometria 3.	15
Analitikus geometria 4.	20
Térgeometria 1.	15
Valószínűségszámítás 2.	15
A/B modul:	20
C modul:	10
Verseny felkészítés:	9
Rendszerezés (vizsgára készülés):	12
	216

## 11. osztály (heti 6 óra, összesen 216 óra)

Függvények, analízis 6.	30
Geometria 10.	25
Analitikus geometria 4.	25
Statisztika 2.	20
A/B modul:	60
C modul:	35
Projekt előkészítése, bemutatása	10
Versenyszervezés:	11
	216

## 12. osztály (heti 7 óra, összesen 224 óra)

Függvények, analízis 7.	40
Térgeometria 2.	35
A/B modul:	45
C modul:	40
Rendszerezés, összefoglalás:	55
Versenyszervezés:	9
	224

## vizsgák

- **8. évfolyamon** második félévben egy **írásbeli vizsgát** kell megírnia a diákoknak. Az írásbeli az alapvető számolási és feladatmegoldási készségeket kéri számon.
- **10. évfolyamon** második félévben **szóbeli vizsgát** kell tenni az első három és fél év anyagából. A szóbeli vizsga az emelt szintű érettségi szóbelijéhez hasonló, annyi különbséggel, hogy sokkal nagyobb hangsúlyt helyez az állítások, tételek bizonyítására.

## projekt

- **11. évfolyamon** egy nagyobb házi dolgozatot kell készítenie a tagozatos diákoknak. A dolgozat témáját önállóan választhatják ki, vagy a "konzulens" tanártól kérhetnek ötletet. A dolgozatot csoportmunkában, tanítási időn kívül kell elkészíteniük. A megadott órakeret a projekt előkészítésére, és az elkészült munkák bemutatására szánható.

# Fejlesztési követelmények

A matematikai tartalmakon túl az alábbi kiemelt fejlesztési követelményeket fogalmazzuk meg:

## 1. szövegértés, jegyzetelés, előadás, digitális írástudás

- *szövegértés*: Feladatok szövegének önálló értelmezése, források (cikk, könyv-részlet) értelmezése, hétköznapi szövegek kritikus elemzése, problémák matematikai modellezése.
- *jegyzetelés*: Az első két évben eljuttatjuk diákjainkat arra a szintre, hogy órai jegyzeteik minősége megfelelő legyen az otthoni tanuláshoz. Ez különösen fontos a matematika tagozaton, hiszen a tananyag nem található meg egyetlen tankönyvben sem.
- *előadás*: Minden diák legalább egy önálló előadást kell tartson tanulmányai során valamilyen matematikai témából.
- *digitális írástudás*: A matematikai szövegek elektronikus megszerkesztése bonyolultabb, mint egy átlagos szövegszerkesztési feladat. (Ábrák, képletek, grafikonok.) Megköveteljük, hogy 11.-es korára minden tagozatos diák képes legyen az általa választott szoftver segítségével igényes formátumú matematikai szöveget készíteni.

## 2. számolási készség, becslés, gépi számítások

- *számolási készség*: A számoló- és számítógépek korában is alapvető kompetenciának tartjuk a fejszámolás és írásban való számolás képességét. Ezek a készségek alapozzák meg többek között az algebra "haladóbb" fejezeteinek megértését.
- *becslés*: Tudatosan tervezzük az olyan probléma-szituációkat (például tesztverseny feladatsorok, hiányos információjú feladatok), ahol a megoldáshoz becslésre van szükség.
- *gépi számítások*: A biztos géphasználat mellett megmutatjuk a gépi számítás furcsaságait és korlátait is.

## 3. bizonyítás, diszkusszió, érvelés

- A matematikai gondolkodás fejlesztését elképzelhetetlennek tartjuk anélkül, hogy diákjaink megtanulnák a matematikai állítások bizonyításának megértését. Elvárjuk a bizonyítások visszaadását, majd önálló felfedezését is. Hangsúlyt helyezünk a megoldások elemzésére, egy probléma nem zárul le egy számszerű végeredmény meghatározásával, tisztázandó a kapott válasz érvényességi köre, pontossága, általánosítási lehetőségei.

## 4. digitális és nyomtatott szakirodalom használata

- Az elmélyült matematikai tanulmányokhoz elengedhetetlen a szakirodalom rutinszerű használata. Kiemelten fontosnak tartjuk, hogy diákjaink az Internet mellett a "hagyományos" könyvtárban is képesek legyenek tájékozódni.

## 5. önálló problémamegoldás

- A típuspéldák és rutin-feladatok megoldásán túl alapvetőnek tekintjük az önálló felfedezésen alapuló, kreatív problémamegoldó gondolkodás fejlesztését.

## 6. együttműködés

- *csapatmunka*: Fontosnak tartjuk, hogy diákjaink megtanulják, hogyan lehet egy nagyobb feladatot csapatban megoldani. A munka megtervezése, elosztása és elvégzése után fontos szerepe van az eredmények bemutatásának (prezentálásának), és az önértékelésnek.
- *odafigyelés a közösség többi tagjára*: Napjainkban - amikor az önmegvalósítás minden korábbinál nagyobb hangsúllyal jelenik meg a közbeszédben és a gondolkodásban - külön figyelmet kell szentelnünk tanulóink beleérző képességeinek fejlesztésére. Ide tartozik a diáktárs ötletének, megoldásának meghallgatása, a "másikkal" való együttgondolkodás, a "másik" sikerének elismerése, vagy a lemaradók korrepetálása, hogy csak néhány példát említsünk.

## 7. adatgyűjtés, modellezés

- Ha a téma lehetővé teszi, olyan önálló feladatokat adunk ki, ahol a diákoknak kell megtervezniük az adatgyűjtést, a modellezést, majd valamilyen választ kell találniuk a felvetett kérdésre. A statisztika elemeinek tanításakor erre jó lehetőség adódik, de máshol is felvethetők ilyen kérdések.

## 8. munkafegyelem, precizitás, elmélyülés képessége, versenyek

- Az információs forradalom egyik nem kívánt mellékhatása a fiatalok figyelmének széttöredezése, továbbá egyfajta lustaság az önálló gondolkodásra. Az egymásra épülő, egyre komolyabb matematikai kihívások segítségével próbáljuk fejleszteni tanítványaink mentális "állóképességét", információ-rendszerzési készségét.
- A versenyeztetést azért tartjuk fontosnak, mert ez az egyik leghatékonyabb módja annak, hogy a tanulókat rákényszerítsük saját eszköztáruk folyamatos bővítésére, újrendezésére és a különböző szakterületek közötti kapcsolatok feltérképezésére.
- Elvárjuk a korosztálynak megfelelő levelezős versenyeken (Abacus, KöMaL), illetve országos matematika versenyeken (Varga Tamás Verseny, Arany Dániel Matematika Verseny, OKTV, Zrínyi Matematika Verseny, Kenguru Matematika Teszt Verseny) való részvételt.

## **9. alkalmazások, kapcsolat más tudományágakkal, tudománytörténet**

- *matematika történet:* A matematika mélyebb megértése nem képzelhető el a tudománytörténeti háttér felvillantása nélkül. Egy-egy fogalom születésének oka, egy-egy terület belső logikája akkor válik érthetővé, ha megismerjük azt a kort és azt a problémakört, amiben a szóban forgó fogalom megszületett.
- *kapcsolat más tudományágakkal:* Célunk, hogy a matematikai ismeretek "élővé váljanak", diákjaink más területeken (természettudományok, társadalomtudományok) képesek legyenek alkalmazni tudásukat, értsék az adott területen használt matematikát. A C-modulok anyaga teremti meg a hidat más területek felé.

# I. Alapok (emelt szintű érettségi anyaga)

## 7. osztály

### Halmazok 1.:

A halmazalgebra elemi fogalmai és műveletei konkrét számhalmazokon. Halmaz megadása. Halmaz, elem, részhalmaz, üres halmaz, halmazok uniója, metszete, különbsége, komplementere (konkrét esetekben). Halmazok szemléltetése Venn-diagrammon, egész számok osztályozása oszthatósági tulajdonságaik alapján. Véges halmazok elemszáma, logikai-szita (2,3 halmazra).

### Kombinatorika 1.:

Az összes eset rendszerezett felsorolása. Változatos kombinatorikai feladatok megoldása különféle módszerekkel. Sorbarendezés ( $n!$  fogalma), kiválasztás néhány elem esetén. Skatulya elv.

### Gráfelmélet 1.:

A gráfelmélet egyszerű alapfogalmai (gráf, csúcs, él, pont fokszáma, izomorfia, teljes gráf. komplementer ) és a gráfok felhasználása feladatmegoldásokban (pl.: ismeretségre vonatkozó egyszerű feladatok).

### Számelmélet 1.:

Páros, páratlan. Az oszthatóság definíciója és elemi tulajdonságai (bizonyítás nélkül). Oszthatósági szabályok ( szemléletes bizonyítás). Prímszámok, eratoszthenészi szita; pozitív egész számok prímtényező felbontása. Pozitív egész kitevőjű hatványozás, azonosságok (bizonyítva). Négyzet- és köbszámok, legnagyobb közös osztó és legkisebb közös többszörös. Osztóknak számának meghatározása.

### Számfogalom 1.:

Természetes számok, egész számok, racionális számok halmaza. Számolási feladatok. Műveletek tulajdonságai. Valós számok, számegegyenes intervallumok (legalább, legfeljebb...), „szomszédos” számok, végtelen. Abszolút érték fogalma.

### Algebra 1.:

Betűk célszerű használata, algebrai kifejezésekkel való számolás egyszerű azonosságok (zárójelfelbontás, disztributivitás,  $(ab)^2$ ,  $(a+b)(a-b)$ ,  $(a+b)^2$  átalakítása), egyenletek és egyenlőtlenségek megoldása, megoldás halmaz. Egyenes és fordított arányosság, százalékszámítás. Szöveggel megadott egyszerűbb feladatok lefordítása az algebra nyelvére, egyenletek felállítása.



## **Függvények, analízis 1.:**

Derékszögű koordinátarendszer (hozzárendelések, grafikonok). A függvényfogalom megalapozása egyszerű példák alapján, értelmezési tartomány, értékészlet. Egyszerűbb függvények (a lineáris-, az abszolútérték-,  $1/x$ , előjel-, egészrész-, törtrész függvény ) ábrázolása. Egyszerű egyenletek és egyenlőtlenségek grafikus megoldására. Egyszerű kémiai, fizikai példák függvényekre, ezek szemléltetése.  $|x|+|y| \leq 1$ ;  $|x| > |y|$  típusú feltételekkel megadott halmazok ábrázolása.

## **Geometriai szemlélet fejlesztése 1.:**

Egyszerű kombinatorikus geometria feladatok (hány részre osztja...). Poliminók (lefedések...). Feladatok kockával (hálók, vetületek, térfogat, felszín, csonkolások...). Térgeometriai alapozás. Szabályos testek, Euler tétel (Polydron készlet segítségével)

## **Geometria 1.:**

Alapfogalmak (pontok, egyenesek, síkok és ezek kölcsönös helyzete). Szögek, nevezetes szögpárok. Háromszög belső- és külső szögeinek összege. Szögszámolások. Távolság (háromszög egyenlőtlenség, merőlegesség). Ponthalmazok (kör, szakaszfelező merőleges, szögfelező). Háromszög nevezetes vonalai (oldalfelező merőleges, szögfelező, magasságvonal, súlyvonal), nevezetes pontjai (köréírható kör középpontja, beírható kör középpontja (bizonyítással), magasságpont, súlypont (biz. nélkül)). Köréírható kör (Thalesz kör (biz. nélkül)) Háromszög szerkesztési feladatok. Egyenlő szárú és szabályos háromszög nevezetes vonalai, pontjai. Nevezetes derékszögű háromszögek (egyenlőszárú,  $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 15^\circ$ )

## **Geometria 2.:**

Négyszögek, speciális négyszögek elemi tulajdonságai. Négyszögek belső- és külső szögeinek összege. Négyszögek szerkesztése. Sokszögek átlói, belső- és külső szögeinek összege. Szimmetrikus síkidomok.(csempézések és szimmetriák)

## **Geometria 3.:**

Kerület. Terület (téglalap, derékszögű háromszög, paralelogramma, trapéz, háromszög, deltoid...) Átdarabolások.

## **Geometria 4.:**

Egybevágósági transzformációk. Szerkesztési és bizonyítási feladatok (pl. legrövidebb út keresése). Háromszögek egybevágósága. Egybevágósági feladatok

## 8. osztály

### Számelmélet 2.:

Műveletek (osztási) maradékokkal. Négyzetszámok maradékai, végződéses, oszthatósági feladatok. Az euklideszi algoritmus alkalmazása két szám ln.k.o.-jának megkeresésére konkrét esetekben. Osztók száma.  $d(n) = k$  alakú egyenletek megoldása. Számrendszerek. Műveletek és oszthatósági szabályok. A prímek száma végtelen.

### Számfogalom 2.:

Negatív kitevőjű hatványozás, normál alak, mértékegységek átváltása, nagy számok. Négyzetgyök fogalma, azonosságai.

### Logika 1.:

Állítások tagadása, kijelentések közötti "és", "vagy" kapcsolatok, Z, N, Q, R jelölések használata egyszerű következtetések helyességének vizsgálata, szükséges és elégséges feltételek, implikáció, ekvivalencia A "minden" és "van olyan" kvantorok használata rövidítésként. Összetett állítások tagadása. Igazságtáblázatok. De Morgan – szabályok.

### Algebra 2.:

Teljes négyzet. Teljes köb. Nevezetes azonosságok, szorzattá alakítás és ennek szerepe egyenletek megoldásában. Teljes négyzetté alakítás. Algebrai törtekkel való számolás (bővítés, egyszerűsítés, közös nevezőre hozás) Abszolút értékes egyenletek. Lineáris két ismeretlenes egyenletrendszer megoldása.

### Függvények, analízis 2.:

Másodfokú-, gyök-, lineáris törtfüggvény. Függvény transzformációk. Függvények tulajdonságai (értelmezési tartomány, értékészlet, szélsőérték, monotonitás, zérushely, páros, páratlan).

### Geometria 5.:

Egybevágósági transzformációk ismétlése elmélyítése. Egybevágósági transzformációk egymásutánja. Szerkesztési és bizonyítási feladatok, egybevágósági feladatok elmélyítése. Háromszög- és négyszögszerkesztési feladatok, mértani helyes szerkesztési feladatok. Példák nem egybevágósági transzformációkra (merőleges vetítés, stb.).

### Geometria 6.:

A kör (kerület, terület (biz. nélkül), részei, ívmérték). Thalesz tétel (bizonyítással). Kör érintője, két kör közös érintői, adott kört és egyenest érintő kör szerkesztése. Érintőnégyzet. Háromszög beírt- és hozzáírt köre. (terület, érintő szakaszok hossza). Szerkesztési feladatok. Pitagorasz tétel (többféle bizonyítással).

## **Geometria 7.:**

Párhuzamos szelők tétele (bizonyítás racionális arányig). Középpontos hasonlóság. Háromszögek hasonlósági alapesetei.

## **Analitikus geometria 1.:**

Vektorokkal végzett alpműveletek (síkban és térben) és alkalmazásaik. Vektorok összeadása, kivonása, számmal való szorzása. Vektor hossza, két pont távolsága. Vektor felbontása adott irányú összetevőkre. Számolás vektorokkal a vektorműveletek és a koordináták kapcsolata vektorok alkalmazása egyszerű bizonyítási és számítós feladatokban. Fizikai alkalmazások (elmozdulás, sebesség, erő).

## **Gráfelmélet 2.:**

Az alapfogalmak bővítése, új fogalmak előkészítése (összefüggő gráf, fa és faváz, irányított gráf, páros gráf stb.). Gráfok bejárása (Euler-vonal (kör és út), Hamilton út és kör). Ramsey-típusú tételek egyszerű setekben.

## **Valószínűségszámítás 1.:**

Ismerkedés a valószínűség fogalmával egyszerű kísérletek, játékok elemzése kapcsán. Gyakoriság, relatív gyakoriság. A kombinatorikus módszerekkel megoldható konkrét valószínűségszámítási feladatok egyszerű esetei. Események lehetetlen, biztos esemény komplementer esemény. Műveletek események között szemléletesen ( $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$  konkrét feladatokban).

## 9. osztály

### **Halmazok 2.:**

Halmaz megadási módjai. A halmazműveletek tulajdonságai a halmazalgebra. Újabb halmazműveletek szimmetrikus differencia, Descartes-szorzat. A halmazműveletek (unió, metszet,) kommutativitása, asszociativitása disztributivitás. De Morgan - szabály. Logikai-szita.

### **Kombinatorika 2.:**

Permutáció, kombináció, variáció (ismétléses, ismétlés nélküli). Pascal háromszög tulajdonságai. Binomiális tétel.

### **Számelmélet 3.:**

Kongruencia fogalma, tulajdonságai. Lineáris kongruenciák és a lineáris diofantoszi egyenletek. További (nem lineáris) diofantoszi egyenletek.

### **Számfogalom 3.:**

Közönséges törtek átírása tizedes tört alakba és vissza. Racionális, irracionális számok, műveletek.

### **Algebra 3.:**

Másodfokú egyenlet megoldóképlete gyökök és együtthatók közti összefüggés gyöktényezős alak. Másodfokú és másodfokúra visszavezethető egyenletek, egyenlőtlenségek egyenletrendszerek, egyenlőtlenségrendszerek megoldása, szöveges feladatok. Első és másodfokú paraméteres egyenletek. Gyökös egyenletek, egyenlőtlenségek.

### **Sorozatok, analízis 3.:**

Egyszerűbb rekurzióval definiált sorozatok (Fibonacci sorozat). Teljes indukció. A számtani, mértani közép (két tagra). Számtani és mértani sorozat jellemzőik.

### **Trigonometria 1.:**

Szögfüggvények derékszögű háromszögben. Egyszerű trigonometrikus összefüggések ( $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ,  $\sin(90^\circ - x) = \cos x$ ) Alkalmazások (emelkedési szög, depresszió szög, háromszög területe).

### **Geometria 8.:**

Háromszögek, négyszögek hasonlósága. Hasonló alakzatok területe. Nevezetes tételek háromszögekben (középvonal, súlyvonal, súlypont, szögfelező tétel, befogó tétel, magasság tétel.)

## **Geometria 9.:**

Kerületi és középponti szögek. Húrnégyszögek. (Talpponti háromszög, Ptolemaiosz tétele, Simson egyenes, Euler-egyenes Feuerbach kör...). Pont körre vonatkozó hatványa.

## **Analitikus geometria 2.:**

Osztópont, súlypont (magasságpont, Euler-egyenes, Feuerbach-kör). Elforgatás.

## **Statisztika 1.:**

Adatok gyűjtése, adathalmazok szemléltetése (táblázattal, diagramokkal (oszlop, kör, hisztogram stb.)). A leíró statisztika alapfogalmai (gyakoriság, relatív gyakoriság, osztályba sorolás stb.) Az átlag, a medián és a módusz fogalma.

## 10. osztály

### Algebra 4.:

A számtani és mértani, a harmonikus és a négyzetes közép közti egyenlőtlenség általános esetben. További nevezetes egyenlőtlenségek. Az egyenlőtlenségek alkalmazása szélsőérték feladatokban. Szöveges szélsőérték feladatok megoldása (másodfokú függvény tulajdonságaira visszavezethetők is).

### Algebra 5.:

$n$ -edik gyök, racionális kitevő, irracionális kitevő, azonosságok. Exponenciális egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek. Logaritmus fogalma, azonosságok. Logaritmikus egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek. Gyakorlati alkalmazások (kamatos kamat, fizikai és kémiai törvények)

### Sorozatok, analízis 4.:

Sorozatok monotonitása, korlátossága, a konvergencia fogalmának előkészítése (párhuzamos szelők tétele irracionális arány esetén, terület,  $\pi$ , példák a matematika különböző területeiről). Az  $e$  definíciója, az  $(1+1/n)^n$  sorozat.

### Függvények, analízis 5.:

Exponenciális-, logaritmus függvény. Az inverz függvény fogalma.

### Trigonometria 2.:

Szögfüggvények kiterjesztése. Trigonometrikus függvények. Periodikus függvények. Különböző szögfüggvények közötti összefüggések. Addíciós tételek. Trigonometrikus egyenletek egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek.

### Trigonometria 3.:

Sinus tétel, cosinus tétel és alkalmazásai.

### Analitikus geometria 3.:

Skaláris szorzat. Fizikai alkalmazások (munka). Egyenes-, sík egyenlete. (irányvektor, normálvektor, meredekség). Egyenesek metszéspontja. Párhuzamos és merőleges egyenesek. Háromszög nevezetes vonalainak egyenlete.

### Analitikus geometria 4.:

Kör egyenlete. Körök egyenesek metszéspontja, kör érintői, hatványvonal. Háromszög nevezetes köreinek egyenlete. Mértani helyek (pl. Apolloniusz kör).

## **Térgeometria 1.:**

Térelemek hajlásszöge és távolsága. Kocka, téglatest, hasáb, paralelepipedon, tetraéder, gúla nevezetes vonalai, síkmetszetei. Tetraéder nevezetes pontjai, körei, nevezetes tetraéderek.

## **Valószínűségszámítás 2.:**

Egyszerű eloszlások. Elemi események, klasszikus valószínűségi modell. Geometriai valószínűség. Eseménytér. Diszkrét valószínűségi változó. Binomiális eloszlás, hipergeometrikus eloszlás. Várható érték. A modellezés, mint matematikai tevékenység. Modellezés egyszerűbb esetekben. A nagy számok törvényének jelentése. A valószínűség biológiai alkalmazásai.

## 11. osztály

### **Függvények, analízis 6.:**

Sorozatok konvergenciája. Függvényhatárérték, folytonosság. Derivált fogalma. Differenciálási szabályok. Monotonitás, szélsőérték, helyi szélsőérték, konvexitás vizsgálata az első és második deriváltfüggvénnyel. A deriválási szabályok alkalmazása teljes függvényvizsgálat szélsőértékfeladatok, szöveges feladatok megoldása is (a megfelelő analízisbeli modell megtalálása).

### **Geometria 10.:**

Kúpszeletek elemi geometriai tárgyalása. Merőleges affinitás.

### **Analitikus geometria 4.:**

Kúpszeletek egyenlete, érintői, tulajdonságai. Merőleges affinitás (alakzatok affin képek egyenlete)

### **Statisztika 2.:**

Adathalmazok jellemzése: középértékek (átlag, medián, módusz), terjedelem, átlagos abszolút eltérés, szórás. Adathalmazok egyesítésének átlaga, szórása.

## 12. osztály

### **Függvények, analízis 7.:**

Felosztás, felosztás sorozat, finomítás, alsó- és felső-összeg, közelítő összeg, határozott integrál. Folytonos függvény integrálja, mint a felső határ függvénye. Primitív függvény, határozatlan integrál. Az integrálás technikája (parciális integrálás helyettesítéssel való integrálás parciális törtekre bontás, a trigonometrikus függvények inverzeinek alkalmazása). A Newton-Leibniz formula. Terület, térfogat, ívhossz, forgásfelület felszíne. Fizikai alkalmazások (munka, súlypont, tehetetlenségi nyomaték, stb.).

### **Térgeometria 2.:**

Henger, kúp, csónkakúp. Gömb és részei. Térfogat- és felszínszámítás.



## II. Modulok

### A és B modulok témakörönként

#### Halmazok:

##### **Halmazok számosság [ halm01 ] (A) (15 óra)**

Ismerkedés a végtelen halmazokkal. (Minden végtelen halmaznak van megszámlálhatóan végtelen részhalmaza.) Tetszőlegesen sok" és "végtelen sok" közti különbség. A megszámlálhatóan végtelen. Az egész számok és a természetes számok halmaza között van egy-egy értelmű leképezés. A racionális számok halmaza megszámlálhatóan végtelen. A természetes számokkal ill. a valós számokkal ekvivalens halmazok. A valós számok halmaza nem megszámlálható. A megszámlálható és a kontinuum számosság. Egyenes, szakasz (nyílt és zárt), körvonal pontjainak halmaza, körlemez és négyzet, háromszög és négyzet, stb., gömbfelület és sík, stb. poliéder és gömb, stb. pontjainak halmaza között egy-egyértelmű leképezés van. Valós számok és végtelen hosszú 0-1 sorozatok ekvivalenciája.

#### Algebra:

##### **Összegek és szorzatok kiszámítása [ alg01 ] (A) (10 óra)**

n természetes szám, négyzetszám, köbszám összege, teleszkópösszegek, a teljes indukció gyakorlására szolgáló feladatok, érdekesebb szorzatok.

##### **Polinomok [ alg02 ] (A) (15 óra)**

Magasabb fokú egyenletek megoldása. (Helyettesítéssel másodfokúra visszavezethető, szimmetrikus egyenletek). Viète-formulák. Magasabb fokú egyenletek racionális gyökei. Polinomok osztása, Horner-elrendezés. Polinomok szorzattá alakítása.

##### **Komplex számok [ alg03 ] (A) (15 óra)**

A komplex számok testének alaptulajdonságai, trigonometrikus alak, hatványozás, gyökvonás, egységgyökök. A harmadfokú egyenlet megoldása. A negyedfokú egyenlet megoldása. Gauss-egészek.

##### **Interpoláció és approximáció [ alg04 ] (B) (10 óra)**

Függvények illesztése adatpontokra. Polinomok és más görbék. Függvénytábla készítés: hiányzó függvényértékek becslése.

##### **Polinomok számelmélete [ alg05 ] (B) (10 óra)**

A számelmélet felépítése különböző polinomgyűrűkben. Irreducibilis polinomok. Körosztási polinom.

## **Csoportelmélet [ alg06 ] (B) (15 óra)**

A csoportelmélet alapjai permutációkon, transzformációkon, műveleteken, számelméletben.

## **Gyűrűk [ alg07 ] (B) (10 óra)**

A gyűrű definíciója, számolási szabályok. Számelmélet különböző gyűrűkben.

## **Számelmélet:**

### **Kongruenciák [ szamelm01 ] (A) (20 óra)**

Kongruenciák tulajdonságai, alkalmazásai oszthatósági feladatokban. Fermat-tétel, Euler-tétel, Wilson-tétel. Maradékosztályok, műveletek maradékosztályokkal.

### **Számelméleti függvények [ szamelm02 ] (A) (15 óra)**

További számelméleti függvények ( $d(n)$  függvény, szigma( $n$ )) függvény). Tökéletes számok, Fermat prímek, Mersenne prímek. Prímek eloszlása.

### **Kongruenciák 2. [ szamelm03 ] (B) (10 óra)**

Kongruenciák haladó alkalmazásai. Kvadratikus kongruenciák megoldása prím modulus esetén, kínai maradék tétel.

### **Diofantikus egyenletek [ szamelm04 ] (B) (10 óra)**

Diofantikus egyenletek. Pell-egyenlet. Lineáris és magasabb fokú diofantikus egyenletek megoldása. Pitagoraszi számhármak. Fermat-sejtés és Wiles-tétel.

## **Függvények és analízis:**

### **Érdekes sorozatok [ fv01 ] (A) (10 óra)**

Háromszögszámok, ...,  $k$ -szög számok, piramidális számok és tulajdonságaik, Fibonacci-sorozat és tulajdonságai (összegek, oszthatóság, kapcsolat a Pascal háromszöggel).

### **Számsorozatok [ fv02 ] (A) (20 óra)**

Konvergens és divergens sorozatok, az  $e$  szám  $(1+1/n)^n$ ,  $e$  irracionális,  $1+1/2+1/3+\dots+1/n - \ln n$ , rekurzióval definiált sorozatok és tulajdonságaik, Newton-iteráció

### **Trigonometrikus függvények inverzei [ fv03 ] (A) (20 óra)**

Definíció, tulajdonságok, grafikonok, egyenletek, egyenlőtlenségek.

### **Hiperbolikus függvények és inverzeik [ fv04 ] (A) (5 óra)**

Definíció, tulajdonságok, grafikonok, egyenletek, egyenlőtlenségek.

### **Az integrál további alkalmazásai [ fv05 ] (B) (10 óra)**

Példák paraméteresen adott görbék által határolt tartományok területére is. Ívhossznál az elliptikus integrál megemlítése. Tórusz, ellipszoid, forgásparaboloid térfogata. Integrál, összegek és becslések. Stirling-formula.

### **Síkgörbék tulajdonságai [ fv06 ] (B) (15 óra)**

Síkgörbék vizsgálata a differenciálszámítás eszközeivel. Paraméteres görbék, polárkoordináták. Ciklois, lemniszkáta, ...

### **Végtelen sorok [ fv07 ] (B) (10 óra)**

Végtelen sorok (például mértani sor), konvergencia kritériumok pozitív tagú sorozatokra, váltakozó előjelű sorok, Leibniz-típusú sor.

### **Hatványsorok [ fv08 ] (B) (10 óra)**

Hatványsorok és alkalmazásaik. Konvergencia-sugár, konvergencia tartomány, műveletek. Taylor-sor, elemi sorfejtések, alkalmazásaik közelítő számításokra, generátor függvényekre.

### **Lánctörtek [ fv09 ] (B) (10 óra)**

Véges és végtelen lánctörtek, példák lánctört alakra (gyök(2),...). Kapcsolat az euklideszi algoritmussal, közelítő számításokkal.

## **Geometria:**

### **Egybevágósági transzformációk egymásutánja [ geo01 ] (A) (10 óra)**

Alkalmazás szerkesztési és bizonyítási feladatokban. Egybevágósági transzformációk osztályozása.

### **Hasonlósági transzformációk, forgatva nyújtás [ geo02 ] (A) (10 óra)**

Alkalmazás szerkesztési és bizonyítási feladatokban. Hasonlósági transzformációk osztályozása.

### **Inverzió [ geo03 ] (A) (15 óra)**

Az inverzió definíciója és tulajdonságai. Alkalmazások szerkesztési és bizonyítási feladatokban.

### **Kúpszeletek és mértani helyek [ geo04 ] (A) (10 óra)**

Kúpszeletek fogalma és elemei geometriával bizonyítható tulajdonságai.

### **Affin és projektív transzformációk [ geo05 ] (B) (10-10 óra)**

Affin és projektív transzformációk. Osztóviszony, kettősviszony. Pascal, Desargues, Papposz.

### **2d-3d analógiák [ geo06 ] (B) (10 óra)**

Sík-tér, háromszög-tetraéder, paralelogramma-paralelepipedon.

### **Gömbi geometria [ geo07 ] (B) (10 óra)**

A geometria fogalmainak szemléletes felépítése gömbön, elemi geometriai tételek megsejtése és bizonyítása.

### **Szerkesztés térben [ geo09 ] (B) (15 óra)**

Ábrázoló geometria.

### **Analitikus geometria:**

#### **Vektorszorzások [ ageo01 ] (A) (15 óra)**

Skaláris, vektoriális és vegyesszorzat. Fizikai alkalmazások (forgatónyomaték, Lorentz-erő, stb.)

#### **Geometria a komplex számsíkon [ ageo02 ] (A) (10 óra)**

A komplex számok alkalmazása geometriai bizonyításokban.

#### **Transzformációk és mátrixok [ ageo03 ] (B) (15 óra)**

Transzformációk mátrixa két és háromdimenziós esetben.

#### **Másodrendű görbék [ ageo04 ] (B) (15 óra)**

Másodrendű görbék osztályozása.

#### **Projektív geometria és homogén koordináták [ ageo05 ] (B) (10 óra)**

Homogén koordináták bevezetése. Projektív tételek analitikus levezetése. Alkalmazások.

#### **Gömbi trigonometria [ ageo06 ] (B) (15 óra)**

Színusz és koszinusztétel gömbön. Távolságok és szögek meghatározása földrajzi koordináták alapján. Terület.

### **Lineáris algebra:**

#### **Determinánsok, egyenletrendszerek [ linalg01 ] (A) (15 óra)**

Determináns fogalma, tulajdonságai, kiszámítása. Sarrus-szabály. Érdekes / nevezetes determinánsok. Determinánsok és egyenletrendszerek. Gauss-elimináció. Cramer-szabály.

#### **Mátrixok [ linalg02 ] (A) (10 óra)**

Mátrixműveletek. Rang. Mátrix és egyenletrendszerek. Mátrix-szorzás és lineáris transzformációk.

## **Lineáris programozás [linalg03] (A) (10 óra)**

Lineáris célfüggvény optimalizálása két és három változóban. Megengedett pontok halmazának ábrázolása. Célfüggvény változása a megengedett halmazban lépdelve.

## **Mátrixok 2. [linalg04] (B) (10 óra)**

Sajátérték és sajátvektor, mátrixok hatványozása.

## **Statisztika és valószínűség számítás:**

### **Feltételes valószínűség [ val01 ] (A) (10 óra)**

Feltételes valószínűség, Bayes-tétel.

### **Geometriai valószínűség [ val02 ] (A) (10 óra)**

A valószínűség fogalma végtelen és nem megszámlálható eseménytér esetén. Találkozási feladatok. Darabolási feladatok.

### **Diszkrét eloszlások és várható érték [ val03 ] (A) (10 óra)**

Binomiális, negatív binomiális, geometriai, hipergeometrikus eloszlás. Várható érték, szórás.

### **Leíró statisztika [ val04 ] (A) (10 óra)**

Adatok szemléletes ábrázolása. Táblázatok és grafikonok. Lineáris regresszió, legkisebb négyzetek módszere, korreláció.

### **Bolyongások és Markov-láncok [ val05 ] (B) (10 óra)**

Szimmetrikus és nem szimmetrikus bolyongások. Visszatérési probléma. Tönkremenési probléma.

### **Folytonos eloszlások [ val06 ] (B) (10 óra)**

Normális eloszlás, exponenciális eloszlás. Várható érték és szórás. Az improprius integrál alkalmazása.

## **Algoritmusok:**

Az algoritmusok egy részét informatika órán tanulják meg a diákok. Nem kell az itt felsorolt összes algoritmust megtanítani, de fontos az algoritmikus szemlélet fejlesztése.

### **Számítási algoritmusok [ algo01 ] (A-B) (10 óra)**

Összeadás, kivonás, szorzás és maradékos osztás papíron. Gyökvonás papíron. LNKO euklideszi algoritmussal. Gyors hatványozás mod n. Prímfelbontás és prímtesztek. Egyiptomi törtek algoritmusai. Átváltás számrendszerek között.

### **Kombinatorikai algoritmusok [ algo02 ] (A-B) (10 óra)**

Permutációk, variációk és kombinációk felsorolása. Felsorolás minimális változással. Partíciók felsorolása (egész számé és halmazé). Utak felsorolása rácsokon. Korlátozott utak felsorolása, például Catalan-számok. Visszalépéses keresés. Rendezés, rendezési algoritmusok minimális cserével, rendezési algoritmusok korlátozott lépésekkel. Keresések, keresési algoritmusok.

### **Gráfalgoritmusok [ algo03 ] (A-B) (10 óra)**

Gráfok reprezentációi: szomszédsági gráf és éllista. Gráfbejárások: szélességi és mélységi bejárás. Minimális összsúlyú feszítőfa. Legrövidebb utak élsúlyozott gráfokban. Topologikus rendezés. Prüfer-kód és fák felsorolása. Huffman-kód és fák. Esetleg: folyam algoritmusok.

### **Algoritmusok bonyolultsága [ algo04 ] (B) (5 óra)**

Algoritmusok hatékonyságának elemzése matematikai módszerekkel. Bonyolultsági osztályok.

## **C modul javaslatok:**

Jól használhatók azok a 2-4 hetes témák, amelyek nem a matematika egy ágához kötve jelennek meg, hanem mint "gyakorlati" probléma. Fontos megjegyezni, hogy egy-egy téma kifejtésének mélysége attól függ, mennyit tanítottunk meg a szükséges eszközökből. Akkor érdemes elővenni egy témát, ha már tudnak annyit a diákok, hogy önálló felfedezéseket tehessenek, érezhessék, hogy matematikai alapjaik elegendőek a problémakör tartalmas feldolgozásához.

Javaslat: Minden évben legyen legalább egy ilyen modul. Feltehetően 10. és 11. évfolyamon növelhető a C-modulok aránya, hiszen ekkorra már elég szélesek és erősek a matematikai alapok, és még nem kell az érettségi felkészülésre koncentrálni.

Javasolt óraszám a C-modulokhoz: 10 óra, ez nagyjából három tanítási hétnek felel meg, legalább két hétvégével.

- C01 Helymeghatározás
- C02 Környezeti nevelés
- C03 Választási matematika
- C04 Ütemezési feladatok, folyamatirányítás
- C05 Origami
- C06 Fraktálok
- C07 Szimmetriák
- C08 Egyiptomi törtek
- C09 Számrendszerek és naptárproblémák
- C10 Titkosírások
- C11 Számítógépi grafika
- C12 Rácsgeometria
- C13 "Sokszínű logika", adatok ábrázolása okosan
- C14 Szerencsejátékok
- C15 Térképek
- C16 Formális nyelvek
- C17 Pénzügyi matematika (kamat, jelenérték, biztosítás, kockázat és hozam)
- C18 Káoszelmélet
- C19 Gépi számábrázolás és aritmetika
- C20 Periodikus és nem periodikus csempézések
- C21 Lineáris programozás és optimalizálás
- C22 Sajtó és internetes szövegek (formális) logikai elemzése
- C23 Játékelmélet
- C24 Diszkrét játékok nyerő stratégiája
- C25 Logika, logikai kapu, logikai áramkörök
- C26 Genetika, öröklődés
- C27 Differenciálegyenletek

A modul-lista folyamatosan bővül a tagozaton tanító tanárok által kidolgozott témákkal.