

Végtelen halmazok számossága

1. A Végtelen szállodának végtelen sok szobája van. Épp mindegyikben lakik valaki. Egy nap jön egy újabb vendég. Költöztessük őt be a szállodába! (Pósa)
2. Másnap érkezik még végtelen sok vendég. Csináljunk nekik is helyet! (Pósa)
3. A szálloda tulajdonosának fülébe jut a hír, hogy pár napon fog érkezi néhány vendég a szállodába, akik szomszédos szobákban szeretnének lakni. Meg tudja-e oldani a tulajdonos, hogy akárhányat is jelent a "néhány", legyen elegendően sok szomszédos üres szoba? (Erben)
4. Néhány év múlva a környéken már végtelen sok végtelen szálloda áll. Egyszer tűz üt ki az összes szállodában, kivéve a Végtelen szállodát. (Azokban a szállodákban, ahol tűz üt ki, teltház van.) Hogyan költöztessük át a vendégeket a szerencsére teljesen üres Végtelen szállodába? (Pósa)
5. Bontsuk fel a természetes számok halmazát végtelen sok végtelen elemű halmazra! (Pósa)
6. Osszuk szét a természetes számokat két halmazba úgy, hogy egyikben se legyen végtelen hosszú számtani sorozat! (Pósa)
7. Megoldható-e a 6. feladat úgy, hogy egyik halmazban se legyen 100 egymást követő szám? (Pósa)
8. Mi az a legkisebb n , amire a 6. feladat megoldható úgy, hogy egyik halmazban se legyen n egymást követő szám? (Pósa)
9. Egy kocka egyik csúcsában ül egy róka, a kockán kívül pedig egy nyúl, puskával a kezében. Egy lépésben két dolog történik. A nyúl kiválaszt három csúcsot, és azokra lő, utána pedig a róka, ha túlélte a lövéseket, átlép egy tetszőleges szomszédos csúcsba. Le tudja-e biztosan lőni a nyúl a rókát? (A nyúl nem látja, hol a róka.) (Erben)
10. Leglább hány lövésre van szüksége a nyúlnak egy lépésben, ha a róka hasonló szabályok szerint mozog egy négydimenziós kockában, és a nyúl mindenképp szeretné lelőni? (Erben)
11. A 9. és 10. feladat rókájának most megengedjük azt is, hogy az egyik lépésnél helyben maradjon, ha szeretne. Legalább hány lövésre van ekkor szüksége egy lépésben a nyúlnak?
12. Egy bolha ugrál a számegyenesen. Egy egész számról indul, és minden lépésben vagy balra, vagy jobbra ugrik egyet. (Mindig ugyan abban az irányban ugrik, de nem tudjuk, melyikben.) Minden lépése után egy egész számot lefújhatok bolhaírtóval. Le tudjuk-e biztosan fújni bolhaírtóval a bolhát? (Erben)
13. Tigris és a Százholdas Pagony fáí... (berzsenyis matektábor)
14. Egy automata két érmét ad vissza, ha bedobunk egyet. Tudja-e valaki olyan "ügyesen" bedobálni a érméket, hogy minden pénzét elveszítse? (Az irigy törpe és a Bölcsesség Köve) (berzsenyis matektábor)
15. Mutassuk meg, hogy megszámlálhatóan végtelen sok racionális szám van. (Péter Rózsa, Játék a végtelennel)
16. Mutassuk meg, hogy több, mint megszámlálhatóan végtelen sok valós szám van. (Péter Rózsa, Játék a végtelennel)
17. Rajzolhatunk-e a síkban a számegyenes minden pontja fölé egy T betűt, (ami egy függőleges és egy vízszintes szakaszból áll) úgy, hogy semelyik kettő ne metsze egymást? (KöMaL fórum)
18. Egy üzenetet szeretnénk leírni valakinek egy írógéppel, ami 3 db tízes számrendszerbeli számból áll. Az írógépen 9 db billentyű van, az egész számok 0-tól 8-ig. (Tehát szóköz például sincs.) Hogy írjuk le az üzenetet úgy, hogy akinek küldeni szeretnénk tudja, mit tartalmaz? (Pósa)

19. A 18. feladat írógépén elromlik minden billentyű a 0-t és az 1-et kivéve. Hogy üzenjünk most? (Pósa)

20. Az írógépen az 1-et kivéve minden elromlik. Tudunk-e így is üzeni? (Pósa)

21. Létezik-e az 1-nél nagyobb pozitív egész számok halmazának olyan végtelen részhalmaza, amelyben az elemek páronként relatív prímek, és amely bármely három elemét kiválasztva a kiválasztottak között lesz kettő, ami a harmadikkal osztva ugyanazt a maradékot adja? (Lelkes, Horowitz)

22. Adott a térbeli derékszögű koordinátarendszerben végtelen sok olyan tengelypárhuzamos téglalest, amelyek egyik csúcsa az origó, és minden csúcs koordinátái nemnegatív egész számok. Kiválasztható-e biztosan közülük kettő, amelyek közül az egyik tartalmazza a másikat? (KöMaL, 2008 május)