Múlt heti maradék

A 0 „karakterláncból” kiindulva a következő lépést ismételgetjük: minden '0'-t lecserélünk '001'-re, és minden '1'-et '0'-ra.

a) Periodikus-e az így kapott sorozat?

b) Adjunk képletet az '1'-ek pozíciójára. (3, 6, 10, 13, ...)

Rávezető lépések

1. Az n. 0–1 sorozatot jelölje w_n ($w_0 =$ `'0'`, $w_1 =$ `'001'`). Bizonyítsuk be, hogy $w_{n+1} = w_n w_n w_{n-1}$.
2. Jelölje z_n és e_n a nullák illetve egyesek számát w_n-ben. Adjunk rekurzív képletet ezekre a sorozatokra!
3. Határozzuk meg a z_n/e_n sorozat határértékét végtelenben. Hogyan következik ebből, hogy a végtelen karakterlánc nem lehet periodikus?
4. Az $e_n/(e_n + z_n)$ sorozat határáetéke alapján „sejtsük meg” a k. egyes pozíciójának képletét.
5. Legyen $D = d_1 d_2 \dots d_n$ egy tetszőleges 0–1 sorozat, és jelölje S a feladatbeli transzformációt. (Tehát például $S($`'001'`$) =$ `'0010010'`.) Jelölje D-ben a nullák arányát z, $S(D)$-ben pedig z'. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{1}{\sqrt{2}}$ z és z' közés esik tetszőleges D esetén.
6. Legyen $I_n = d_1 d_2 \dots d_n$ a feladatban generált végtelen karakterlánc kezdőszelete, és z_n az I_n-ben szereplő nullák száma. Bizonyítsuk be, hogy I_n utolsó karakterén múlik, z_n és $\frac{n}{\sqrt{2}}$ sorrendje: ha $d_n =$ `'0'`, akkor $z_n > \frac{n}{\sqrt{2}}$, ha pedig $d_n =$ `'1'`, akkor $z_n < \frac{n}{\sqrt{2}}$.
7. Legyen I_n az a kezdőszelet, aminek utolsó karaktere a k. egyes. Adjunk becsléseket k és n, illetve k és $n + 1$ arányára.
8. Adjunk explicit képletet a k. egyes pozíciójára.
9. *Beatty-tétel* Legyen $r > 1$ irracionális szám, s pedig az $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ egyenlet megoldása. Definiáljuk a következő sorozatokat: $a_n = \lfloor rn \rfloor$, $b_n = \lfloor sn \rfloor$. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész előfordul vagy a_n-ben vagy b_n-ben, de mindig csak az egyikben.

Kombinatorikus számelmélet

Forrás: Peter Vandendriessche, Hojoo Lee *Problems in Elementary Number Theory*

1. Milyen k esetén osztható az $\{1, 2, 3, \dots, k\}$ halmaz két egyenlő összegű részre?
2. Bizonyítsuk be, hogy a $\mathcal{H} = \{2^k - 3 \mid k = 2, 3, \dots\}$ halmaznak van olyan végtelen részhalmaza, amelyben bármely két elem relatív prím.
3. A pozitív egészeket véges sok halmaz diszjunkt uniójára bontottuk. Bizonyítsuk be, hogy a részhalmazok egyike rendelkezik az alábbi tulajdonsággal: minden pozitív egésznek végtelen sok többszörösét tartalmazza.
4. Tudjuk, hogy $|X| = n + 2$ és X elemei legfeljebb n abszolútértékű egészek. Bizonyítsuk be, hogy van X-nek három különböző eleme a, b és c, amelyekre $c = a + b$.
5. Legyenek a és b 2-nél nagyobb egészek. Bizonyítsuk be, hogy létezik pozitív egészek $a = n_1$, n_2, $n_3, \dots, n_k = b$ sorozata, amelyre minden $1 \le i < k$ esetén $n_i + n_{i+1} \mid n_i n_{i+1}$.
6. Legyen $m \ge 2$ egész. Adjuk meg azt a legkisebb $n > m$ egészt, amire igaz a következő: bárhogy is osztjuk két részre az $\{m, m + 1, \dots, n\}$ halmazt, legalább az egyik részben található három (nem feltétlenül különböző) elem, a, b és c, amelyekre $c = a^b$.