Vegyük a legnagyobbat (legkisebbet)!

Forrás: Rosenthal: Going to extremes (Quantum 1990 nov.)

1. Adott a síkon pontok egy $\mathcal{H}$ halmaza úgy, hogy bármelyik közülük középpontja egy olyan szakasznak, amelynek a végpontjai is a megadott pontok közül valók. Bizonyítsuk be, hogy $\mathcal{H}$ végtelen!

2. Egy végtelen sakktábla mezőire úgy írtunk természetes számokat, hogy minden mezőn a négy élszomszédos mezőre írt szám átlaga található. Bizonyítsuk be, hogy az összes szám egyenlő!

3. Egy $n \times n$-es sakktábla mezőin úgy helyeztünk el bábukat, hogy teljesüljön a következő: ha egy mezőn nem áll bábu, akkor a rajta áthaladó sorban és oszlopban összesen legalább n bábu található. Bizonyítsuk be, hogy legalább $n^2/2$ bábut helyeztünk el a táblán!

4. Egy $n \times n$-es sakktábla mezőire úgy írtunk egészeket, hogy teljesüljön a következő: ha egy mezőn 0 áll, akkor a rajta áthaladó sorban és oszlopban legalább n a számok összege. Bizonyítsuk be, hogy legalább $n^2/2$ a táblára írt számok összege!

5. Adott a síkon néhány pont, amik nincsenek egy egyenesen. Mutassuk meg, hogy van olyan kör, ami pontosan három megadott ponton megy át, és a belsejében nem tartalmaz pontot az adottak közül.

6. Az ABC háromszög belsejében felvettünk egy D pontot úgy, hogy az ABD, BCD és CAD háromszögek köréírt körének sugara legalább akkora, mint ABC-é. Mit mondhatunk ABC-ről és D-ről?

7. Adott a síkon n (≥ 3) *általános helyzetű* egyenes. Az egyenesek tartományokra bontják a síkot. Bizonyítandó: bármely egyenes esetén az egyenes által határolt tartományok között van háromszög.

8. Adott a síkon n (≥ 3) egyenes úgy, hogy bármely kettő metszi egymást, és minden metszésponton legalább három egyenes megy át. Ekkor minden egyenes egy ponton megy át.

9. Az $x^2 + y^2 = 3(z^2 + u^2)$ egyenletnek nincs megoldása a pozitív egészek halmazán.

10. Oldjuk meg a természetes számok halmazán: $x + y + z = xyz$.

11. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= x_3^2 \\
x_2 + x_3 &= x_4^2 \\
x_3 + x_4 &= x_5^2 \\
x_4 + x_5 &= x_1^2 \\
x_5 + x_1 &= x_2^2
\end{aligned}
$$

12. Hét gombász 100 gombát gyűjtött, mindegyikük különböző számút. Ekkor van köztük három, akik együtt legalább 50 gombát gyűjtöttek.

13. Egy országban bármely két reptér között különböző a távolság. Minden reptérről felszáll egy repülőgép és a legközelebbi leszállóhelyre tart. Legfeljebb hány gép érkezhet egy reptérre? (b) Biztosan lesz-e olyan reptér, ahova nem érkezik gép?

14. Minden tetraéderben van olyan él, amely hegyesszöget zár be végpontjaiból induló élekkel.

15. Egy kockát kisebb kockákra daraboltunk. Bizonyítsuk be, hogy van két egybevágó a darabok között.

Vegyük a legnagyobbat (legkisebbet)!

Forrás: Rosenthal: Going to extremes (Quantum 1990 nov.)

1. Adott a síkon pontok egy $\mathcal{H}$ halmaza úgy, hogy bármelyik közülük középpontja egy olyan szakasznak, amelynek a végpontjai is a megadott pontok közül valók. Bizonyítsuk be, hogy $\mathcal{H}$ végtelen!

2. Egy végtelen sakktábla mezőire úgy írtunk természetes számokat, hogy minden mezőn a négy élszomszédos mezőre írt szám átlaga található. Bizonyítsuk be, hogy az összes szám egyenlő!

3. Egy $n \times n$-es sakktábla mezőin úgy helyeztünk el bábukat, hogy teljesüljön a következő: ha egy mezőn nem áll bábu, akkor a rajta áthaladó sorban és oszlopban összesen legalább n bábu található. Bizonyítsuk be, hogy legalább $n^2/2$ bábut helyeztünk el a táblán!

4. Egy $n \times n$-es sakktábla mezőire úgy írtunk egészeket, hogy teljesüljön a következő: ha egy mezőn 0 áll, akkor a rajta áthaladó sorban és oszlopban legalább n a számok összege. Bizonyítsuk be, hogy legalább $n^2/2$ a táblára írt számok összege!

5. Adott a síkon néhány pont, amik nincsenek egy egyenesen. Mutassuk meg, hogy van olyan kör, ami pontosan három megadott ponton megy át, és a belsejében nem tartalmaz pontot az adottak közül.

6. Az ABC háromszög belsejében felvettünk egy D pontot úgy, hogy az ABD, BCD és CAD háromszögek köréírt körének sugara legalább akkora, mint ABC-é. Mit mondhatunk ABC-ről és D-ről?

7. Adott a síkon n (≥ 3) *általános helyzetű* egyenes. Az egyenesek tartományokra bontják a síkot. Bizonyítandó: bármely egyenes esetén az egyenes által határolt tartományok között van háromszög.

8. Adott a síkon n (≥ 3) egyenes úgy, hogy bármely kettő metszi egymást, és minden metszésponton legalább három egyenes megy át. Ekkor minden egyenes egy ponton megy át.

9. Az $x^2 + y^2 = 3(z^2 + u^2)$ egyenletnek nincs megoldása a pozitív egészek halmazán.

10. Oldjuk meg a természetes számok halmazán: $x + y + z = xyz$.

11. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= x_3^2 \\
x_2 + x_3 &= x_4^2 \\
x_3 + x_4 &= x_5^2 \\
x_4 + x_5 &= x_1^2 \\
x_5 + x_1 &= x_2^2
\end{aligned}$$

12. Hét gombász 100 gombát gyűjtött, mindegyikük különböző számút. Ekkor van köztük három, akik együtt legalább 50 gombát gyűjtöttek.

13. Egy országban bármely két reptér között különböző a távolság. Minden reptérről felszáll egy repülőgép és a legközelebbi leszállóhelyre tart. Legfeljebb hány gép érkezhet egy reptérre? (b) Biztosan lesz-e olyan reptér, ahova nem érkezik gép?

14. Minden tetraéderben van olyan él, amely hegyesszöget zár be végpontjaiból induló élekkel.

15. Egy kockát kisebb kockákra daraboltunk. Bizonyítsuk be, hogy van két egybevágó a darabok között.