Nemzetközi Magyar Matematika Verseny – 2011

11. évfolyam

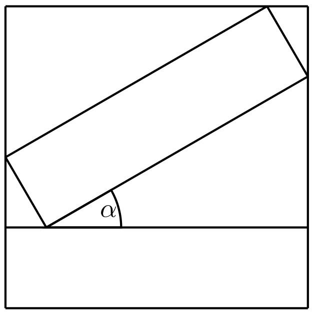
1. Igazoljuk, hogy
$$\frac{2}{1+2^2}+\frac{2^2}{1+2^{2^2}}+\cdots+\frac{2^n}{1+2^{2^n}}<\frac{2}{3}$$
bármely $n \geq 1$ esetén.

Kovács Béla, Szatmárnémeti

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán a
$$6\sqrt{x-2}+10\sqrt{2x+3}+12\sqrt{3x+3}=6x+74$$
egyenletet.

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

3. Egy négyzetbe az ábra szerint két egybevágó téglalapot írtunk. Mekkora az α szög?



dr. Katz Sándor, Bonyhád

4. Legyen az ABC háromszög AB oldalának A-hoz közelebbi harmadolópontja P, az A-tól távolabbi harmadolópontja Q. Legyen továbbá a BC oldalon a B-hez közelebbi harmadolópont R, a B-től távolabbi harmadolópont S. Legyen a CA oldalon a C-hez közelebbi harmadolópont T, a C-től távolabbi harmadolópont U. Legyen a PS és BT szakaszok metszéspontját az U ponttal összekötő egyenes és a BC szakasz metszéspontja V. Határozzuk meg a BUV háromszög és a $PQRSTU$ hatszög területének arányát.

Bíró Bálint, Eger

5. Egy 10×10-es táblázat minden sorába és minden oszlopába az ábrán látható módon beírjuk a számokat 0-tól 9-ig, majd minden sorban és minden oszlopban bekeretezünk pontosan 1 számot, tehát összesen 10-et. Van-e a bekeretezett számok között mindig legalább két azonos szám?

0	1	2	...	9
9	0	1	...	8
8	9	0	...	7
...	...	...	...	...
1	2	3	...	0

Szabó Magda, Szabadka

6. Jelölje tetszőleges pozitív egész n szám esetén $t(n)$ az n szám különböző prímosztóinak számát. Mutassuk meg, hogy végtelen sok olyan pozitív egész n szám van, amelyre

a) $t(n^2+n)$ páratlan,

b) $t(n^2+n)$ páros.

Borbély József, Tata

12. évfolyam

1. Bizonyítsuk be, hogy ha az a, b, c pozitív valós számok kielégítik az
$$5abc > a^3 + b^3 + c^3$$
egyenlőtlenséget, akkor létezik a, b, c oldalú háromszög.

Oláh György, Komárom

2. Legyen a_n a $\sqrt{n}$-hez legközelebbi egész szám. Mennyi az
$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{2011}}$$
összeg értéke?

Kántor Sándor, Debrecen

3. Az ABC háromszögbe írható kör O középpontjára illeszkedő e egyenes az AB és AC oldalakat M és N pontokban metszi. D és E a BO és CO egyenesek olyan pontja, amelyre $ND \parallel ME \parallel BC$. Igazoljuk, hogy az A, D és E pontok egy egyenesre illeszkednek.

dr. Katz Sándor, Bonyhád

4. Az ABC háromszög A csúcsához tartozó magasságának a BC oldal egyenesén levő talppontja D. A B és C pontokból az A csúcsból induló belső szögfelezőre bocsátott merőlegesek talppontjai rendre E és F. Az EF és BC szakaszok metszéspontja M. Legyen az ABC háromszög területe T, a DEF háromszög területe t. Bizonyítsuk be, hogy
$$\sqrt{\frac{t}{T}} = \frac{FM \cdot BM \cdot DE}{EM \cdot CM \cdot AB}.$$

Bíró Bálint, Eger

5. Adott egy tetszőleges poliéder. Lehet-e a csúcsaiba pozitív egész számokat írni a következő módon?

a) Ha él köt össze két csúcsot, akkor a csúcsokba írt számok relatív prímek;

b) ha két csúcs nincs éllel összekötve, akkor a csúcsokba írt számok legnagyobb közös osztója 1-nél nagyobb.

Kántor Sándorné, Debrecen

6. Létezik-e olyan négyzetszám, amelynek a számjegyeinek az összege 2011^{2010}?

Szabó Magda, Szabadka