Sorozatok

Forrás: Arthur Engel *Problem-Solving Strategies*

1. Bizonyítsuk be, hogy az $a_0 = 0, a_n = \sqrt{6 + a_{n-1}}$ sorozat monoton és korlátos.
2. Az $\{x_n\}$ sorozatról a következőket tudjuk: $x_0 = 2, x_1 = 7$ és $x_{n+1} = 7x_n - 12x_{n-1}$. Adjuk meg x_n „zárt alakját”.
3. $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, $a_{n+1} = (1 + a_{n-1}a_n)/a_{n-2}$. Bizonyítsuk be, hogy a sorozat elemei egészek.
4. Hány olyan π permutációja van az $1, 2, 3, \ldots, n$ számoknak, amelyben minden i-re teljesül, hogy $|\pi_i - i| \leq 1$?
5. Az f függvéy rendelkezik a következő tulajdonsággal:
$$\forall x \in \mathbb{R}: \qquad f(x+1) + f(x-1) = \sqrt{2}f(x)$$
a) Bizonyítsuk be, hogy f periodikus.
b) Írjuk a $\sqrt{2}$ helyébe olyan számot, hogy a periódus 10 legyen.
6. Bizonyítsuk be, hogy minden $a_1 > 1$ pozitív egészhez létezik pozitív egészek olyan növekvő $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sorozata, hogy $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2$ osztható $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$-val, minden k-ra.
7. *Josephus probléma:* Egy kör mentén felírtuk az $1, 2, 3, \ldots, 2011$ számokat. Az 1-estől indulva kihúzunk minden második számot, egészen addig, amíg egyetlen szám marad. Melyik ez a szám?
8. (*) A 0 „karakterláncból” kiindulva a következő lépést ismételgetjük: minden ’0’-t lecserélünk ’001’-re, és minden ’1’-et ’0’-ra.
a) Periodikus-e az így kapott sorozat?
b) Adjunk képletet az ’1’-ek pozíciójára. (3, 6, 10, 13, ...)