language: Hungarian

# $4^{\text{th}}$ Middle European Mathematical Olympiad

EGYÉNI VERSENY

2010. szeptember 11.

**I-1. feladat**

Adjuk meg az összes olyan $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, melyre minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén fennáll, hogy

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(xy) + (y+1)f(x) + (x+1)f(y).$$

**I-2. feladat**

Egy $N$ pozitív egész összes pozitív osztóját felírjuk egy táblára. Két játékos, $A$ és $B$, felváltva lépnek a következő játékban. Az első lépésben $A$ letörli $N$-et. Ha az utoljára letörölt szám $d$ volt, akkor a soron következő játékos vagy $d$ egy osztóját, vagy $d$ egy többszörösét törölheti le. Az a játékos veszít, aki nem tud többet lépni. Határozzuk meg az összes olyan $N$-et, amelyre $A$ meg tudja nyerni a fenti játékot $B$ lépéseitől függetlenül.

**I-3. feladat**

Adott egy $ABCD$ húrnégyszög és egy $E$ pont az $AC$ átlón úgy, hogy $AD = AE$ és $CB = CE$. Legyen $k$ a $BDE$ háromszög körülírt köre, és $M$ jelölje $k$ középpontját. A $k$ kör az $AC$ egyenest $E$ és $F$ pontokban metszi. Bizonyítsuk be, hogy az $FM$, $AD$ és $BC$ egyenesek egy ponton mennek át.

**I-4. feladat**

Keressük meg az összes olyan $n$ pozitív egész számot, amelyre teljesül az alábbi két feltétel:

(i) $n$-nek legalább négy különböző pozitív osztója van;

(ii) $n$-nek minden olyan $a$ és $b$ osztójára, melyre $1 < a < b < n$ teljesül, $b - a$ osztja $n$-et.

*A feladatok megoldására 5 óra áll rendelkezésre.*
*Kérdéseket az első 45 percben lehet feltenni.*
*Minden feladat 8 pontot ér.*
*A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.*