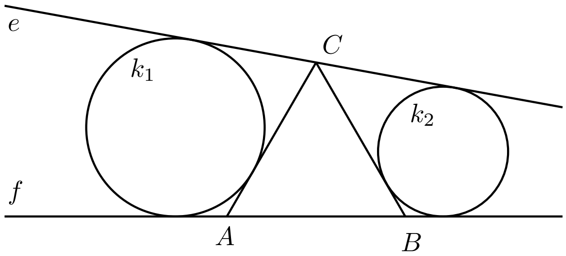
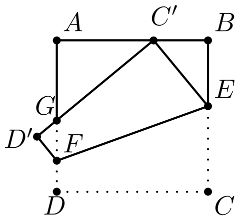
1. feladatsor

1. feladat: Az ABC szabályos háromszög oldalának hossza 10 egység. Az AB oldal egyenese f. A C csúcson keresztül olyan e egyenest húztunk, ami a háromszögön kívül halad. Ezután megrajzoltuk az ábrán látható módon a k_1 és k_2 köröket, amelyek érintik az e és f egyeneseket, továbbá a háromszög egy-egy oldalát kívülről.



Jelölje a körök sugarának hosszát r_1 és r_2. Bizonyítsuk be, hogy az $r_1 + r_2$ összeg értéke nem függ az e egyenes helyzetétől, és határozzuk meg ezt az értéket!

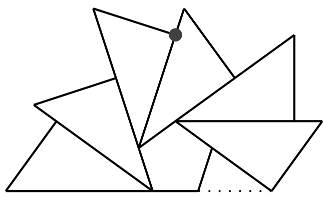
2. feladat: (*Haga-tételek.*) Egy $ABCD$ négyzet alakú papírt félbehajtunk úgy, hogy a C csúcs az AB oldalon fekvő C' pontban kerül.



a) Bizonyítsuk be, hogy a C középpontú és CB sugarú kör érinti a $C'D'$ egyenest!

b) Bizonyítsuk be, hogy $K_{C'BE} + K_{FGD'} = K_{AC'G}$!

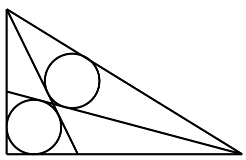
3. feladat: Egy szabályos ötszög köré – az ábrán látható módon – egybevágó derékszögű háromszögeket „pakoltunk”.



a) Határozzuk meg, hányszorosa a háromszög átfogója az ötszög oldalának!

b) Bizonyítsuk be, hogy a megjelölt pont az ötszög szimmetriatengelyére esik!

4. feladat: Egy derékszögű háromszöget úgy bontottunk fel az ábrán látható módon négy részre, hogy a négyszög alakú részbe kör írható, aminek sugara megegyezik a háromszög alakú részbe írt kör sugarával. Fejezzük ki a körök sugarát a háromszög oldalaival!



2. feladatsor

1. feladat: Adott az ABC háromszög és egy P belső pontja. P-n keresztül párhuzamosokat húzunk a háromszög oldalaival. A BC-vel párhuzamos egyenes az AC oldalt M-ben, a CA-val párhuzamos AB-t N-ben, az AB-vel párhuzamos BC-t L-ben metszi.

Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} \leq \frac{1}{8}$$

2. feladat: Az ABC háromszög síkjában fekvő P ponthoz rendeljük hozzá a következő számhármast:

$$P \to \left(\frac{T_{PBC}}{T_{ABC}}, \frac{T_{PCA}}{T_{ABC}}, \frac{T_{PAB}}{T_{ABC}} \right)$$

A képletben szereplő területek előjelesek, az előjel megfelel a körüljárási irány előjelének. Az így kapott számhármast a P pont ABC háromszögre vonatkozó *baricentrikus koordinátáinak* nevezzük. Szokásos *homogén baricentrikus koordinátázást* is használni, ami azt jelenti, hogy $k \neq 0$ esetén az (x, y, z) és (kx, ky, kz) koordináta hármasok azonos pontot jelölnek.

Igazoljuk a következőket:

- A háromszög csúcsai $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ és $(0, 0, 1)$; oldalfelező pontjai pedig $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$ és $(1, 0, 1)$.
- A súlypont $G(1, 1, 1)$.
- A beírt kör középpontja $I(a, b, c)$.
- A hozzáírt körök középpontja $I_a(-a, b, c)$, $I_b(a, -b, c)$, $I_c(a, b, -c)$.
- A szimmedián pont $K(a^2, b^2, c^2)$. (Tükrözzük a súlyvonalakat az azonos csúcsból induló szögfelezőre! Az így kapott egyeneseket a háromszög szimmediánjainak nevezzük. Ezek egy pontban metszik egymást.)
- A köréírt kör középpontja $O(\sin 2\alpha, \sin 2\beta, \sin 2\gamma)$.
- A magasságpont $M(\tan \alpha, \tan \beta, \tan \gamma)$.

3. feladat: Vizsgáljuk meg baricentrikus koordinátarendszerben a következőket: egyenes egyenlete, szakasz osztópontja, háromszög területe, adott egyenessel párhuzamos egyenes adott ponton át.

4. feladat: Legyen D és E az A-ból és B-ből induló magasságok talppontja, P és Q pedig az A-ból és B-ből induló belső szögfelezők metszéspontja a szemközti oldallal. Bizonyítsuk be, hogy D, I és E pontosan akkor kollineáris, ha P, O és Q az.