Tartalomjegyzék

A tétel 1

Használati útmutató 1

A kidolgozott vázlat 2
- Elhelyezés . . . 2
- Részletek . . . 2
  - Érintők . . . 2
  - Háromszögek és köreik . . . 3
  - Thalesz és kerületi szögek . . . 3
  - Szerkesztések . . . 4
  - Körök és hasonlóság . . . 5
  - Nevezetes tételek . . . 5
  - Szögmérés . . . 7
  - Kerület, ívhossz, terület . . . 7
  - Érintő- és szelőszakaszok, pont hatványa körre . . . 7
- Alkalmazás . . . 8

A tétel

Kör, érintő, húr. Beírt kör, köréírt kör, hozzáírt kör létezése és szerkesztése. Érintőszakaszok tulajdonságai, hosszuk meghatározása. Két kör közös érintői. Thalesz-tétel. Kerületi szögek tétele és alkalmazásai. Látókörív. Szerkesztési feladatok megoldása látókörökkel.

Feuerbach-kör. Ptolemaiosz-tétel. Simson-egyenes.

Szögmérés fokokkal és radiánban. Ívhossz és középponti szög kapcsolata. Kör kerülete, területe, körcikk, körszelet és körgyűrű területe. Pont körre vonatkozó hatványa, érintő- és szelőszakaszok tétele.

Húrnégyszögek és érintőnégyszögek.

Használati útmutató

1. Ez egy nagy tétel, 15 perc alatt nem lehet az egészet rendesen elmondani. Minden vizsgázónak el kell döntenie, hogy mit emel ki ebből a témakörből, hogyan akarja felépíteni a saját feleletét.

2. A vázlatban nincs leírva az összes állítás bizonyítása, mert nem volt mindenre időm. Természetesen lehet választani az itt nem bizonyított tételeket is a feleletben, hiszen órán mindegyiket megcsináltuk (reményeim szerint).

A kidolgozott vázlat

Elhelyezés

Ebben a tételben sok helyről szedtük össze a körökkel kapcsolatos tudnivalókat, ezért nem lehet egy matematikatörténeti korszakhoz vagy egy matematikushoz kötni. Ezért csak megemlítek néhány történeti érdekességet.

Euklidesz Az euklideszi szerkesztés megengedett eszközei a körző és a vonalzó, ezeknek a kör és az egyenes felel meg.

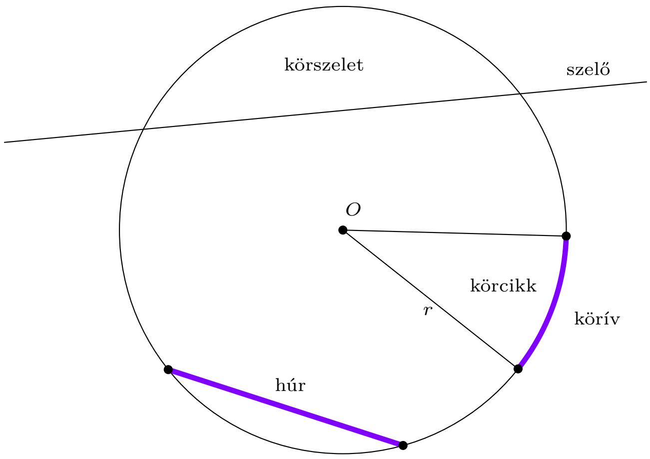
Ptolemaiosz Geocentrikus világképében körmozgások kombinációjaként próbálta meg leírni az égitestek megfigyelt pályáját.

Apoloniusz A kúpszeletekről (ellipszis, parabola, hiperbola) írta hétkötetes művét a Konikát. A kúpszeleteket többek között érintőkörök középpontjainak halmazaként definiálta, a kúpszeletek szerkesztési problémáit körérintési feladatokra vezette vissza.

Sangaku feladatok Japánban a 17–19. században terjedt el, hogy templomokban művészien díszített fatáblákra festett matematika példákat helyeztek el. Ezek a táblák gyakran érintőkörökkel kapcsolatos feladatokat tartalmaztak.

Részletek

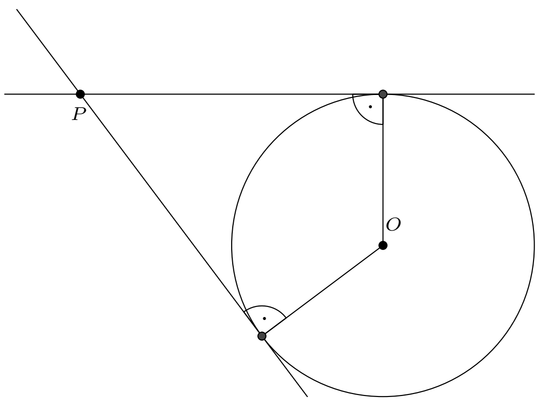
Definíció: A *kör* azon pontok halmaza a síkon, mely pontok a sík egy rögzített pontjától (a középponttól) egyenlő távol vannak. Az egyenlő távolságot a kör *sugarának* nevezzük. A következő ábrán a kör részeit nevezzük meg.



Definíció: Az e egyenest a k kör *érintőjének* nevezzük, ha egyetlen közös pontja van a körrel.

Érintők

A kör bármely pontjában húzható egy és csak egy érintő, ami merőleges az érintési pontba mutató sugárra. Külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők.



Ha egy négyszögnek van beírt köre, akkor *érintőnégyszögnek* nevezzük. Nem minden négyszög érintőnégyszög, jellemzésük az alábbi tételpár alapján lehetséges.

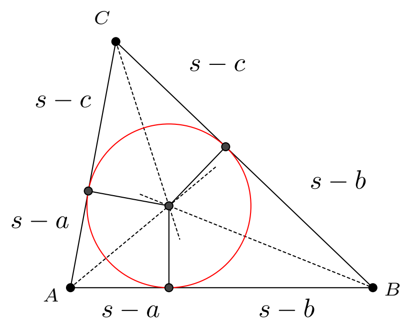
Ha egy négyszög érintőnégyszög, akkor szemközti oldalai hosszának összege egyenlő. Ennek bizonyításához csak meg kell jelölni az egyenlő érintőszakaszokat.

A megfordítás így szól: ha egy konvex négyszög szemközti oldalai hosszának összege egyenlő, akkor a négyszög érintőnégyszög. Ennek bizonyítása picit ravaszabb, indirekt: Indoklás és bizonyítás (←link).

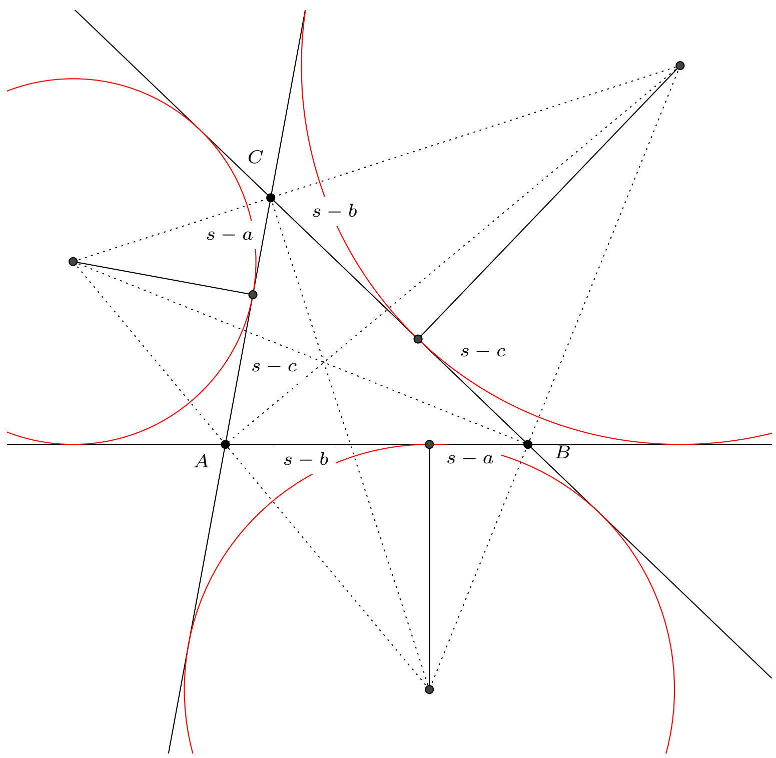
Háromszögek és köreik

A háromszög *köréírt* köre az a kör, amely átmegy a háromszög csúcsain. Minden háromszögnek létezik köréírt köre, amelynek középpontját az oldalfelező merőlegesek adják meg. Az oldalfelező merőlegesek mindig egy ponton mennek át, és ez a pont egyenlő távol van a háromszög csúcsaitól.

A háromszög *beírt* köre az a kör, amely belülről érinti a háromszög oldalait. Minden háromszögnek van beírt köre, amelynek középpontját a belső szögfelezők metszéspontja adja meg. A belső szögfelezők egy ponton mennek át, és ez a pont egyenlő távol van a háromszög oldalegyeneseitől. A beírt kör oldalakon vett érintési pontjai $s-a$, $s-b$ és $s-c$ hosszúságú részekre osztják az oldalakat, az ábra szerint.



A háromszög *hozzáírt* köre az a kör, amely kívülről érinti a háromszög egyik oldalát, és érinti a másik két oldal egyenesét. Minden háromszögnek van három hozzáírt köre, amelyek középpontját két külső és egy belső szögfelező metszéspontja adja meg. A hozzáírt körök oldalakon vett érintési pontjai $s-a$, $s-b$ és $s-c$ hosszúságú részekre osztják az oldalakat, az ábra szerint.



Thalesz és kerületi szögek

Thalesz-tétel: Ha az AB átmérőjű kör A-tól és B-től különböző pontja C, akkor $ACB\sphericalangle = 90°$.

Bizonyítás: Legyen a kör középpontja O. Az AOC és COB háromszögek egyenlő szárúak, ezért az ABC háromszög szögei: α, $\alpha+\beta$ és β. Innen $2(\alpha+\beta)=180°$, tehát $ACB\sphericalangle = \alpha+\beta = 90°$.

Thalesz-tétel megfordítása: Ha az ABC háromszögben $ACB\sphericalangle = 90°$, akkor a háromszög köréírt körének középpontja az AB átfogó felezőpontja.

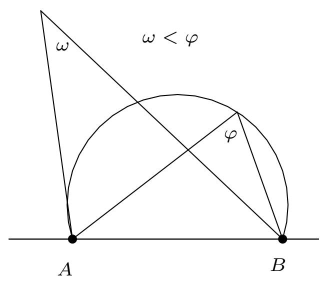
Bizonyítás: Legyen az AB felezőpontja O. C-t O-ra tükrözve olyan D pontot kapunk, amire $ACBD$ derékszögű paralelogramma, tehát téglalap. A téglalap átlói egyenlők és O-ban felezik egymást, ezért O a téglalap, így az ABC háromszög köréírt körének középpontja.

Kerületi és középponti szögek tétele: Adott egy k kör és annak egy AB íve. Az AB ívhez tartozó középponti szög kétszerese az ívhez tartozó kerületi szögnek, beleértve az érintőszárú kerületi szöget is. Ennek következménye, hogy a kör AB íven kívüli részének bármely pontjából azonos szög alatt látszik az AB húr.

Bizonyítás: Eseteket kell vizsgálni: a) a kerületi szög egyik szára átmérő (egyszerű szögszámolás, hasonlít a Thalesz-tételhez); b) a kör középpontja a kerületi szög belső pontja (két a)-beli eset összege); c) a kör középpontja nincs a kerületi szög szárai között (két a)-beli eset különbsége); d) érintőszárú eset (egyszerű szögszámolás).

Látókörív: Adott egy AB szakasz és egy $0° < \varphi < 180°$ szög. Azon pontok halmaza a síkon, amelyekből AB éppen φ szög alatt látszik: két az AB-re szimmetrikus körív.

Bizonyítás: Azt a lemmát kell használni, hogy az AB egyenese által kijelölt egyik félsíkban találunk egy jó P pontot, akkor az APB kör félsíkba eső részének minden pontja jó, és a félsíkban a köríven belül nagyobb, a köríven kívül pedig kisebb a látószög.



Húrnégyszögek jellemzése: Egy négyszög akkor és csak akkor húrnégyszög, ha szemközti szögeinek összege 180°.

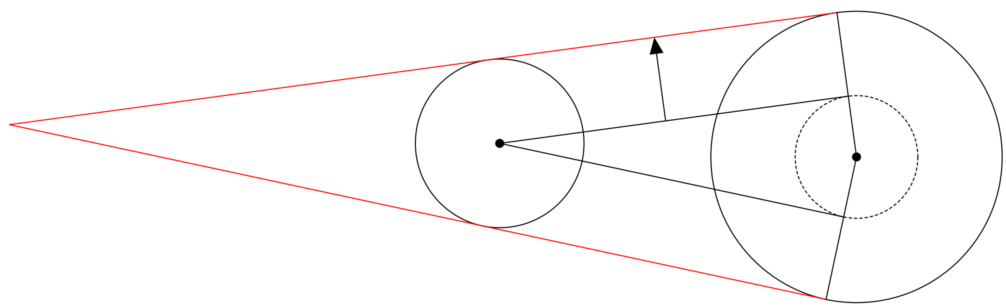
Bizonyítás: A „csak akkor” következik abból, hogy a szemközti szögekhez tartozó középponti szögek 360°-ra egészítik ki egymást. Az „akkor” bizonyítása történhet például indirekt módon: ha felvesszük valamelyik három csúcs által meghatározott háromszög köréírt körét, akkor a negyedik csúcs nem lehet sem kívül, sem belül, mert a látókörív tulajdonság alapján akkor nem jönne ki a 180°-os szögösszeg.

Szerkesztések

Mutatunk három egyszerű példát euklideszi szerkesztésre.

1. érintő külső pontból: A külső pont P, a kör középpontja O. Az OP szakasz Thalesz-köre kimetszi az érintési pontokat a körből.

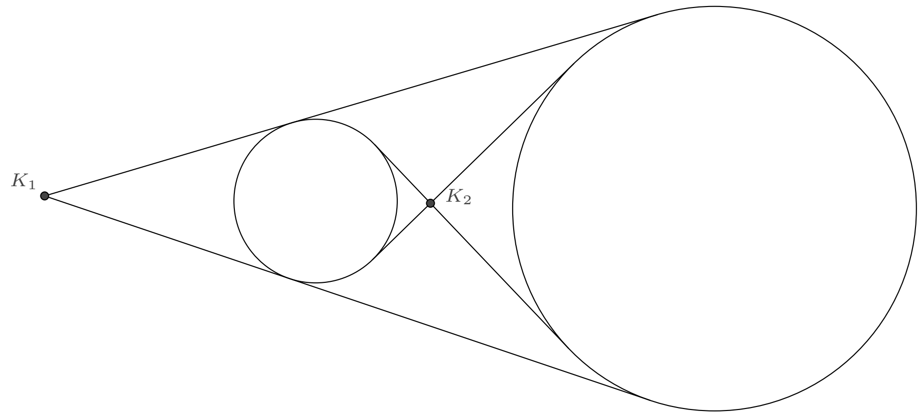
2. két nem metsző kör közös érintői: Feltesszük, hogy a körök nem metszik egymást, és a sugaruk különböző. A külső közös érintőket szerkesztjük meg, a belsők szerkesztése hasonló. „Csökkentjük” a nagyobbik kör sugarát a kisebbik kör sugarával, és az így kapott körhöz érintőket húzunk a kisebbik kör középpontjából. Végül ezeket az érintőket „kifelé” eltoljuk a sugarak különbségével. A szerkesztésből az is kiolvasható, hogy a két kör közös külső érintőszakaszának hossza $e = \sqrt{d^2 - (R - r)^2}$, ahol d a középpontok távolsága.



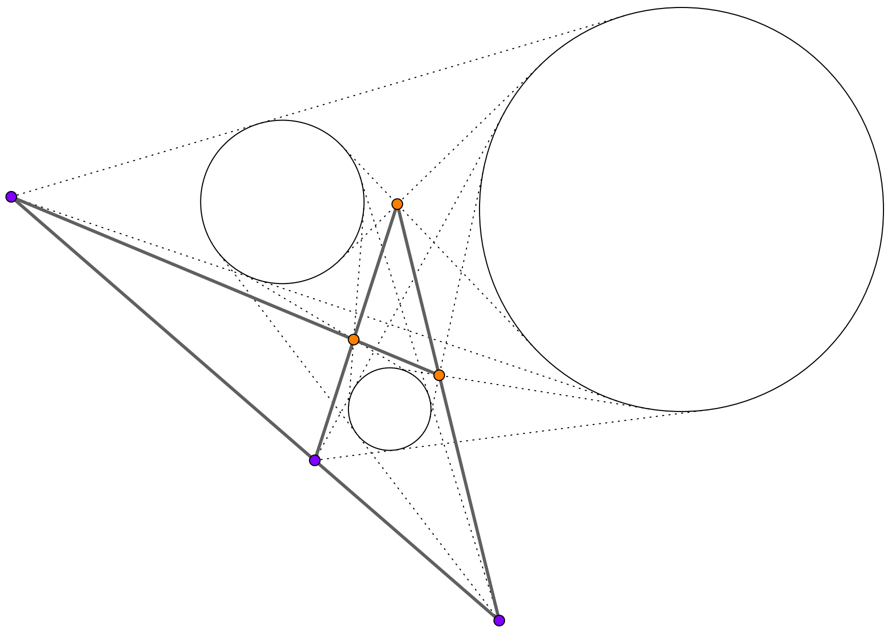
3. háromszög, ha adott a, m_a és α: Megszerkesztjük egy a hosszú szakasz (egyik) α szögű látókörívét, és ebből az a-tól m_a távolságra haladó párhuzamos metszi ki a harmadik csúcsot. Lehetséges, hogy nincs metszéspont, akkor nincs megoldása a szerkesztési feladatnak.

Körök és hasonlóság

Bármely két kör hasonló egymáshoz. Ha sugaruk különböző, akkor két középpontos hasonlóság létezhet, ami az egyik kört a másikba viszi.



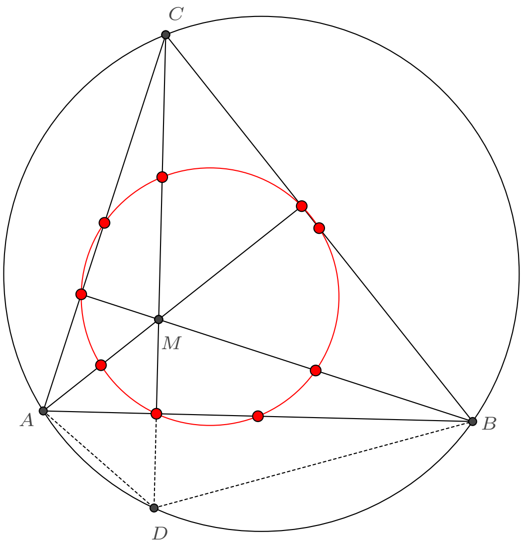
Három kör esetén a lehetséges hasonlósági középpontok hármasával egy-egy egyenesre esnek, az alábbi ábra szerint:



Nevezetes tételek

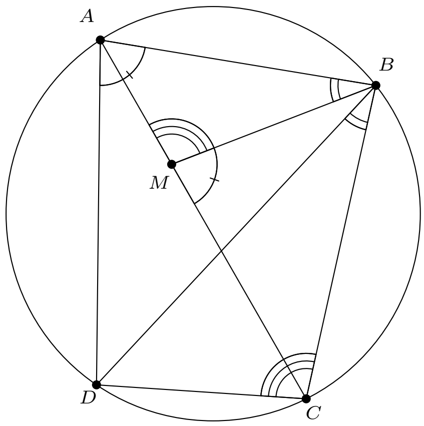
Feuerbach-kör: *Egy háromszög oldalfelező pontjai, magasság talppontjai és a magasságpontot a csúcsokkal összekötő szakaszok felezőpontjai egy körön vannak. (Ezt a kört szokás „kilencpontos” körnek is hívni.)*

Bizonyítás: Megmutatjuk, hogy a tételben említett kilenc pont mindegyike rajta van azon a körön, amit úgy kapunk, hogy a háromszög körülírt körét felére kicsinyítjük a magasságpontból. Az nyilvánvaló, hogy a magasságpont és a csúcsok közötti szakaszok felezőpontjai rajta lesznek ezen a körön. A felezőpontok és a talppontok igazolásához azt mutatjuk meg, hogy a magasságpont tetszőleges oldalegyenesre és tetszőleges oldal felezőpontra vonatkozó tükörképe a körülírt körre esik.
Ehhez felhasználjuk a kerületi szögek tételét. Egyszerű szögszámolással kifejezhető az AMB szög a háromszög szögeivel, és éppen $180° - \gamma$ jön ki, ami igazolja állításunkat, hiszen a húrnégyszög tételre hivatkozhatunk.



Ptolemaiosz-tétel *Ha $ABCD$ húrnégyszög, akkor $AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$, vagyis a szemközti oldalak hosszának szorzatait összeadva éppen az átlók hosszának szorzatát kapjuk.*

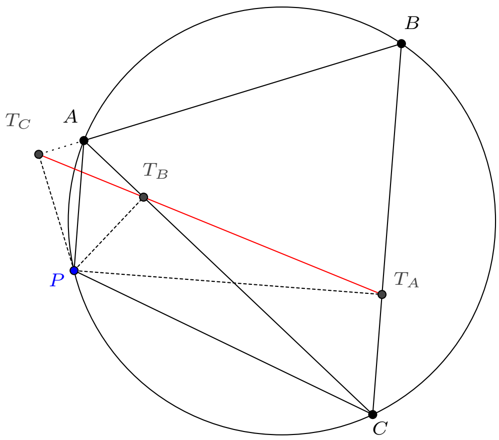
Bizonyítás: Az AC átlón található egy olyan M pont, amelyre $ABM_\Delta \sim DBC_\Delta$ és $MBC_\Delta \sim ABD_\Delta$ (egyszerű szögszámolással, vagy forgatva nyújtással adódik).



A hasonlóságokat használva $\frac{AB}{DB} = \frac{AM}{DC} \Rightarrow AM = \frac{AB \cdot DC}{DB}$ és $\frac{BC}{DB} = \frac{MC}{AD} \Rightarrow MC = \frac{BC \cdot AD}{DB}$. Összegezve: $AC = AM + MC = \frac{AB \cdot DC}{DB} + \frac{BC \cdot AD}{DB}$. Beszorozva DB-vel éppen a bizonyítandó állításhoz jutunk.

Simson-egyenes *Ha egy háromszög körülírt körének tetszőleges pontjából merőlegeseket állítunk a háromszög oldalegyeneseire, akkor a merőlegesek talppontjai egy egyenesre esnek.*

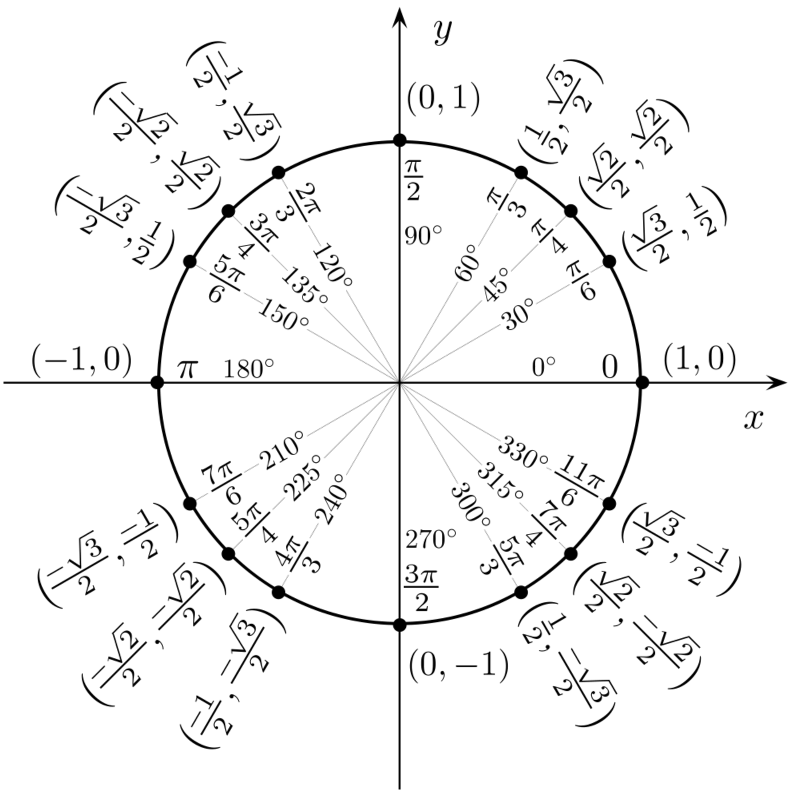
Bizonyítás: A kerületi szögek tételét használhatjuk.



A PT_CAT_B és PT_BT_AC húrnégyszögek, innen $AT_BT_C\sphericalangle = APT_C\sphericalangle$ és $T_AT_BC\sphericalangle = T_APC\sphericalangle$. Végül (ezen az ábrán) $APT_C\sphericalangle = T_APC\sphericalangle = 90° - \gamma$. Tehát $AT_BT_C\sphericalangle = APT_C\sphericalangle$ csúcsszögek, piros száraik egy egyenesbe esnek.

Szögmérés

A szöget leggyakrabban *fokokban* vagy *radiánban* mérjük. Egy teljes szög 360°, a mérés arányos, tehát az egyenes szög 180°, a derékszög 90°. *Egységsugarú* körben az α középponti szöghöz tartozó ív hossza az α mértéke radiánban. A következő ábra néhány gyakori szög értékét mutatja fokban és radiánban.



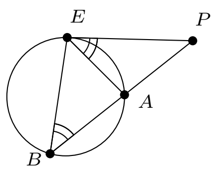
Kerület, ívhossz, terület

Bizonyítás nélkül elfogadtuk a következőket: az r sugarú kör kerülete $2r\pi$, az r sugarú kör területe $r^2\pi$, az α középpontú és r sugarú körív hossza $r\alpha$, amennyiben α radiánban van megadva. Az r sugarú és α középponti szögű körcikk területe $\frac{1}{2}r^2\alpha$, amennyiben α radiánban van megadva. A körszelet területét úgy kapjuk, hogy a körcikkből levonjuk a háromszöget, a körgyűrűnél pedig a nagyobb kör területéből kivonjuk a kisebbét.

Érintő- és szelőszakaszok, pont hatványa körre

Szelőszakasz tétel külső pontra Ha P a k körön kívül van, és egy P-n átmenő szelő az A és B pontokban metszi k-t, továbbá egy P-n átmenő érintő E-ben érinti k-t, akkor $PE^2 = PA \cdot PB$.

Bizonyítás: $PEA_\triangle \sim PEB_\triangle$ az érintőszárú kerületi szög tétele alapján. A hasonlóságból: $\frac{PE}{PA} = \frac{PB}{PE} \Rightarrow PE^2 = PA \cdot PB$. Következmény: a P-n átmenő bármelyik szelő esetén ugyanannyi a szelőszakaszok szorzata.

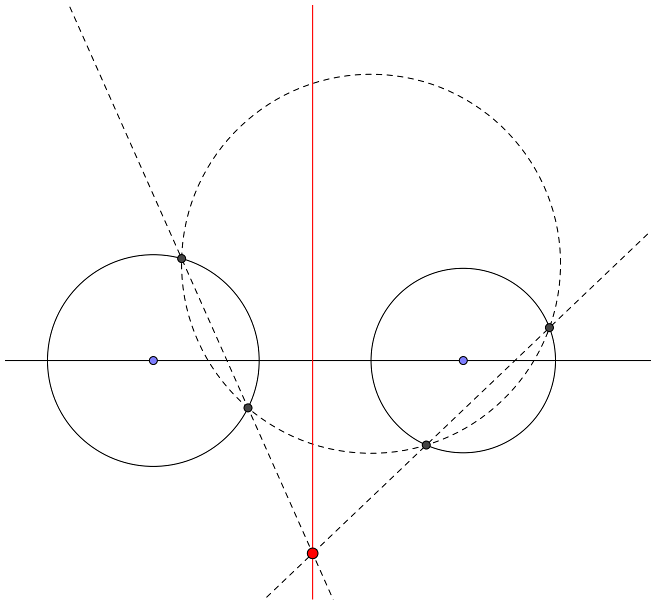


Szelőszakasz tétel belső pontra Ha P a k körön belül van, és két P-n átmenő húr végpontjai A és B, illetve C és D, akkor $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

Bizonyítás: $PDA_\triangle \sim PCB_\triangle$ a kerületi szög tétel alapján. Innen ugyanúgy megy, mint az előző esetben.

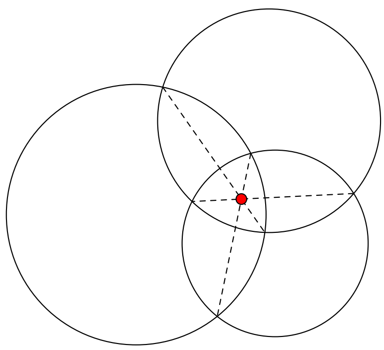
Pont hatványa körre Legyen a P pont d távolságra egy r sugarú k kör középpontjából. Ekkor P *hatványa a körre* a $h_k(P) = d^2 - r^2$ mennyiség. Megjegyzés: $h_k(P)$ előjele megmutatja, hogy P a körön kívül vagy belül helyezkedik el.

Két kör hatványvonala: Azon pontok halmaza a síkon, melyeknek a két adott körre vonatkozó hatványa egyenlő. Megmutatható, hogy a hatványvonal egy egyenes, ami merőleges a körök *centrálisára*. Metsző körök esetén egyszerűen látható, hogy a hatványvonal a metszéspontokat összekötő egyenes, érintő körök esetén pedig az érintési pontban húzható közös érintő. Nem metsző körök esetén egy segédkörrel szerkeszthető a hatványvonal:

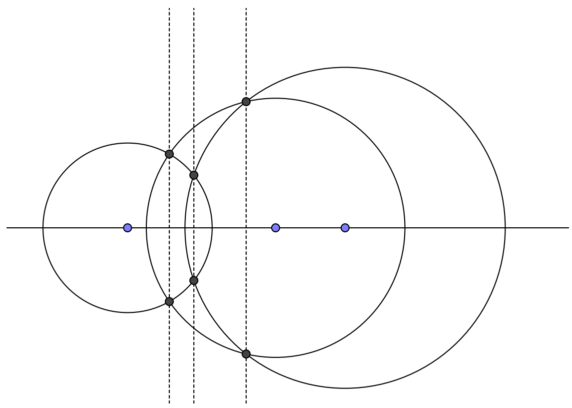


Ha a két kör koncentrikus és különböző sugarú, akkor nincs hatványvonaluk.

Három kör hatványpontja: Legyen adott k_1, k_2 és k_3 kör, és jelölje $h_{i,j}$ a k_i és k_j kör hatványvonalát. Ha a $h_{1,2}$, $h_{1,3}$ és $h_{2,3}$ egyenesek egy ponton mennek át, akkor ezt a pontot a három kör *hatványpontjának* nevezzük.

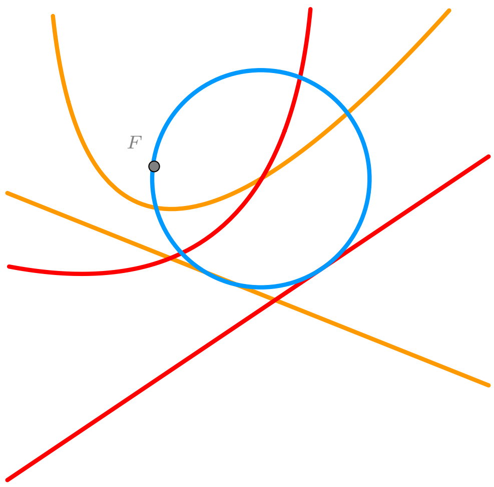


Akkor nem jön létre hatványpont, ha a három kör középpontja egy egyenesre esik.



Alkalmazás

A parabola definiálható a következő módon: azon körök középpontjának halmaza a síkon mely körök egy rögzített ponton (a fókuszponton) átmennek és egy egy rögzített egyenest (a vezéregyenest) érintenek. Emiatt ha két közös fókuszú parabola metszéspontjait szeretnénk megszerkeszteni, akkor egy adott ponton átmenő és két adott egyenest érintő kört (köröket) kell szerkesztenünk.



Ez pedig egy közismert feladat. Szerkesztünk egy tetszőleges kört, ami a két egyenest érinti, és az egyenesek metszéspontjából úgy nagyítjuk vagy kicsinyítjük, hogy a képe átmenjen a fókuszon. Általában két megoldása van.