Tartalomjegyzék

A tétel

Az összes eset rendszerezett felsorolása. Kombinatorikai feladatok megoldásának különféle módszerei, például táblázat, ágrajz, útrajz. Esetek megszámlálása: permutáció, kombináció, variáció (ismétléses, ismétlés nélküli).

Skatulya-elv.

Pascal háromszög tulajdonságai (például: $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$). Binomiális tétel.

Használati útmutató

1. Ez egy közepesen nagy tétel, 15 perc alatt nem lehet az egészet rendesen elmondani. Minden vizsgázónak el kell döntenie, hogy mit emel ki ebből a témakörből, hogyan akarja felépíteni a saját feleletét.

2. A vázlatban nincs leírva az összes állítás bizonyítása, mert nem volt mindenre időm. Természetesen lehet választani az itt nem bizonyított tételeket is a feleletben, hiszen órán mindegyiket megcsináltuk (reményeim szerint).

3. A leírt indoklások nagyon tömörek, vázlatosak. Megértésükhöz gondolkodás szükséges.

A kidolgozott vázlat

Elhelyezés

A kombinatorika a matematika egyik legfiatalabb ága. Önálló fejezetté a 20. század második felében vált, leginkább az elektronikus számítógépek megjelenésének köszönhetően. Az egyik első – kombinatorikával foglalkozó – monográfiát világhírű matematikusunk, **Lovász László** írta. A mű eredetileg angolul jelent meg: *Combinatorial problems and exercises*, később készült el a magyar változat *Kombinatorikai problémák és feladatok* címmel.

A kombinatorikai gondolkodás elterjesztéséért nagyon sokat tett **Erdős Pál**, akinek a valószínűségszámítás és a számelmélet mellett a kombinatorika volt a harmadik kedvenc kutatási területe. Tanítványaira és kutató társaira gyakorolt hatása máig érezhető, nem véletlen, hogy a matematika világában „magyar iskolaként” emlegetik a hazai kombinatorikusok által művelt gondolkodási stílust.

Az egyetemi tematikákban és a nemzetközi irodalomban a kombinatorika elnevezés helyett inkább a *véges matematika* vagy a *diszkrét matematika* megjelölést használják. Két neves amerikai kombinatorikus **Ronald Graham**, aki Donald Knuth szerzőtársa volt a *Konkrét matematika* megalkotásában, és **Richard Stanley**, aki az esetek megszámlálásának módszereiről írta *Enumerative Combinatorics* című könyvét.

A magyar középiskolai oktatásban szokás a valószínűségszámítás eszközeként tekinteni a kombinatorikára („jó esetek száma” / „összes eset száma”), de ma már sokkal inkább az *algoritmuselmélet* használja a diszkrét matematikai módszereket. Szintén a kombinatorikából nőtt ki és vált önálló területté a *gráfelmélet* és az *operációkutatás*.

Részletek

Ebben a tételben leginkább a *felsorolás* és *megszámlálás* kérdéseivel foglalkozunk. Donald Knuth gondolatát követve ide olyan típusú problémák tartoznak, hogy valamilyen tulajdonságú matematikai objektumokat szeretnénk:

- felsorolni;
- sorba rendezni;
- közülük az n.-et közvetlen módon megkapni;
- közülük egy véletlenszerűt előállítani;
- végül (ami a legismertebb): számukat meghatározni.

Kombinatorikai gondolatok, megoldási módszerek

A következő módszereket *megszámlálási feladatok* megoldásához használhatjuk. Ezek a feladatok mindig valamilyen típusú objektumokból álló véges halmaz számosságára kérdeznek rá.

rendszerezett felsorolás, táblázat Ha figyelünk, hogy valamilyen logika szerint soroljuk fel a lehetséges eseteket, akkor van rá remény, hogy nem hagyunk ki semmit, és nem számolunk kétszer semmit.

Példa: Hány olyan sorrendje van az 1, 2, 3, 4 számoknak, ahol az x szám nem állhat az x. helyen?

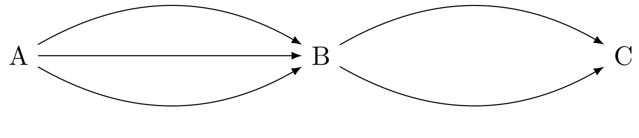
Megoldás: Négyjegyű számoknak képzeljük a sorrendeket, és növekvő rendben adjuk meg őket.

2143, 2341, 2413, 3142, 3412, 3421, 4123, 4312, 4321

független döntések Ha egy objektum létrehozásánál két egymástól független döntést hozhatunk, amelyek x és y lehetőség közüli választást jelentenek, akkor összesen $x \cdot y$ a lehetőségek száma, hiszen az első döntés bármely kimeneteléhez a második döntés bármely kimenetele párosítható, és az így kapott párokat mind különbözőnek tekintjük.

Természetesen n döntéssel is elmondható a séma. Ha az egymástól független döntések esetén n_1, n_2, $\ldots n_k$ választási lehetőségünk van, akkor összesen $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ a lehetőségek száma.

Ez az egyszerű séma jól szemléltethető *útrajzzal.*

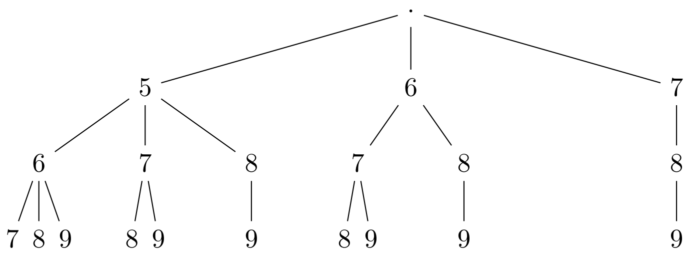


Ha a fenti ábrán azt kérdezzük, hogy hányféle úton juthatunk el A-ból C-be, akkor a válasz $3 \cdot 2 = 6$, mert csak B-n keresztül mehetünk, és először három, másodszor két út közül kell választanunk.

egymást kizáró esetek Ha egy halmaz két diszjunkt (közös elem nélküli) részhalmaz uniójaként állítható elő, akkor elemszáma egyenlő a részhalmazok elemszámának összegével. Az ilyen esetek sokszor *farajzzal* ábrázolhatók.

Példa: Hány háromjegyű szám van, amelynek jegyei balról jobbra nőnek, és nagyobbak négynél.

Megoldás: Farajzzal ábrázoljuk az eseteket, először az első jegy lehetséges értékei szerint ágazunk el. A megoldás a fa leveleinek száma. Az ábrán fentről lefelé kell kiolvasni a számokat.



jó=összes−rossz Van amikor könnyebb azt megszámolni, ami nem kell nekünk, és ezt a számot levonva a teljes sokaság méretéből végül megkaphatjuk a minket érdeklő objektumok számát.

Példa: Hány háromjegyű szám van, amelyben előfordulnak azonos jegyek?

Megoldás: Összesen $9 \cdot 10^2 = 900$ háromjegyű szám van. Ha minden jegy különbözik, az $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ lehetőség (az első helyen nem állhat nulla, a másodikon nem állhat az első jegy, a harmadikon nem állhat az első két jegy). Tehát ismétlődés $900 - 648 = 252$ számban van.

szita Figyeljünk oda, hogy ha valamit kétszer számoltunk, akkor a duplán számolt eseteket egyszer le kell vonni. Általánosabban, az $A_1, A_2, \ldots, A_k$ véges halmazokkal megadhatjuk, hogy hány eleme van $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$ halmaznak:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_k| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \ldots \pm |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k|.$$

Ez $k = 2$ és $k = 3$ esetén még áttekinthető:

$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$

$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$

Példa: Hány olyan 100-nál nem nagyobb szám van, ami osztható 3-mal **vagy** 7-tel?

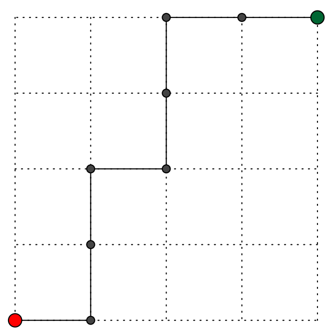
Megoldás: 3-mal osztható $[100/3] = 33$ van, 7-tel osztható $[100/7] = 13$, 3-mal **és** 7-tel pedig $[100/21] = 4$ szám osztható. Tehát összesen $33 + 13 - 4 = 42$ szám osztható 3-mal **vagy** 7-tel az $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ halmazból.

bijekciók A számolás azt jelenti, hogy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést (bijekciót) létesítünk két véges halmaz, az $\{1, 2, \ldots, n\}$ és egy másik halmaz elemei között. Sokszor segít egy halmaz elemeinek megszámlálásában, ha sikerül találnunk egy másik halmazt és egy bijekciót az új halmaz és a vizsgált halmaz elemei között.

Példa: Hányféle út vezet a $(0; 0)$ pontból a $(4; 4)$ pontba, ha csak jobbra és felfele léphetünk, és minden lépés hossza egységnyi?

Megoldás: Minden út megfeleltethető egy kódnak, a lépéssorozat kódjának. A megfeleltetés az ábra alapján megérthető.

$JFFJFFJJ$



Megmutatható, hogy a megfelelő utak és a 8 hosszú J-F sorozatok között bijekció létesíthető, ha a sorozat pontosan 4 J és 4 F betűt tartalmaz. Az ilyen kódok száma már egyszerűen kiszámolható: a 8 helyből kell a 4 J pozícióját kiválasztani, vagyis $\binom{8}{4} = 70$ út van.

Formulák, amiknek neve van

n különböző elemnek $n!$ különböző sorrendje van, ezt *ismétlés nélküli permutációnak* hívjuk. Ha az n elem között vannak egyenlők, méghozzá n_1 darab, n_2 darab, $\ldots n_k$ darab, akkor *ismétléses permutációról* beszélünk, ezek száma $\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}$.

n különböző dologból $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$ különböző k-hosszú sorozat készíthető, ha az ismétlés nem megengedett. Ezt *ismétlés nélküli variációnak* hívjuk. Ha ismétlődhetnek elemek a k-hosszú sorozatokban, akkor a lehetőségek száma n^k, és ezt *ismétléses variációnak* nevezzük.

Ha n különböző dologból k különbözőt húzunk, és a sorrend nem számít, akkor *ismétlés nélküli kombinációról* beszélünk, és a lehetőségek száma $\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}$. Ha visszatevéssel húzunk (ismétléses kombináció), de a sorrend továbbra sem számít, akkor a lehetőségek számát az $\binom{n+k-1}{k}$ formula adja.

Skatulya-elv

A skatulya-elv egy nagyon erős kombinatorikus bizonyítási módszer. Legalább két változata létezik:

véges: Ha n skatulyába legalább $n+1$ dolgot akarunk bepakolni, akkor lesz legalább egy olyan skatulya, ahova legalább két dolog kerül.

Példa: Bizonyítsuk be, hogy hét négyzetszám között biztosan van kettő, amelyek különbsége osztható 10-zel!

Megoldás: A skatulyák a négyzetszámok lehetséges 10-es maradékai: $\{0,1,4,5,6,9\}$. Mivel hét négyzetszámunk van, lesz olyan maradék, ami legalább kétszer szerepel. Ha két szám azonos maradékot ad 10-zel osztva, akkor különbségük 10-zel osztható.

végtelen: Ha véges sok skatulyába végtelen sok dolgot akarunk bepakolni, akkor lesz legalább egy olyan skatulya, ahova végtelen sok dolog kerül.

Példa: Bizonyítsuk be, hogy az $1, 11, 11, \ldots, 11\ldots1, \ldots$ sorozatban végtelen sok 13-mal osztható szám van!

Megoldás: Legyenek a skatulyák a 13 szerinti lehetséges maradékok. Mivel a sorozat végtelen, lesz olyan maradék, amely végtelenszer szerepel. Ha ez a maradék a nulla, akkor kész is vagyunk. Ha ez a maradék valami $x\neq 0$, akkor bármely két 13-mal x maradékot adó „csupaegy” különbsége egy 13-mal osztható $11\ldots100\ldots0$ alakú szám. De $(10;13)=1$, ezért ha $13\mid\underbrace{11\ldots1}_{n}\underbrace{00\ldots0}_{k}$, akkor $13\mid\underbrace{11\ldots1}_{n}$ is igaz. Ha a kivonásnál a kisebbik tag rögzített, a nagyobbik változik, akkor csupa különböző n hosszúságú 13-mal osztható „csupaegyet” kapunk.

Pascal-háromszög és binomiális együtthatók

A Pascal-háromszög első néhány sora így néz ki:

$$\begin{array}{lccccccccc}
n=0: & & & & & 1 & & & & \\
n=1: & & & & 1 & & 1 & & & \\
n=2: & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
n=3: & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
n=4: & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

A folytatásban minden *belső* elem a fölötte lévő kettő összege, a *szélső* elemek pedig mindig 1-ek.

Az n. sor k. elemét szoktuk így is jelölni: $\binom{n}{k}$ és binomiális együtthatónak nevezzük. A jelölés nem véletlenül egyezik meg a korábban látottal. Bebizonyítjuk, hogy az n- sor k. elemének értéke egyenlő azzal, ahányféle módon visszatevés nélkül kiválaszthatunk n különböző dologból k különbözőt, ha a kiválasztás sorrendje nem számít. Megmutatjuk tehát, hogy

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Ha $k=0$ vagy $k=n$, akkor $0!=1$ miatt (ez definíció) igaz az állítás:

$$\binom{n}{0}=\frac{n!}{0!n!}=1 \text{ és } \binom{n}{n}=\frac{n!}{n!0!}=1.$$

Tegyük fel, hogy a k. sorig már igazoltuk az állítást. Ezt és a Pascal-háromszög képzési szabályát felhasználva:

$$\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}=$$

$$= \frac{n!(k+1)+n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}.$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a Pascal-háromszög elemi éppen azok a számok, amelyek az ismétlés nélküli kombinációk számát adják meg. A *binomiális együttható* elnevezést az alábbi tétel indokolja:

Newton-féle binomiális tétel

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n.$$

Konkrétan például $n = 4$-re ez így néz ki:

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

A Newton-féle binomiális tétel bizonyítása

Mivel $(x+y)^n = (x+y)\cdot(x+y)\cdot\ldots\cdot(x+y)$, ezért például x^ky^{n-k} együtthatója az a szám, ahányféle módon kiválaszthatunk az n zárójelből k-t (azokat, ahonnan x-et vesszük be a szorzatba). Nyilván ha az x-eket kiválasztottuk, akkor az összes többi zárójelből y-t kell választani, ezért valóban n lesz x és y kitevőjének összege. Azt pedig már korábban láttuk, hogy n dolog közül k különbözőt $\binom{n}{k}$-féle módon választhatunk ki. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

A binomiális együtthatók két ismert tulajdonsága

1. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$, vagyis a Pascal-háromszög sorösszegei a megfelelő kettő hatványok.

   Ennek bizonyítása nagyon egyszerű: a képzési szabály miatt a k. sorban lévő minden szám a $k+1$. sorban két elemben „van benne”, az alatta jobbra és balra lévőben. Ez még a szélső egyesekre is igaz. Tehát minden sor összege az előző duplája, és a nulladik sor összege valóban 1.

2. $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \ldots \pm \binom{n}{n} = 0$, vagyis a Pascal-háromszög váltakozó előjelű sorösszege mindig nulla.

   Erre a Newton-féle binomiális tétel kínál egyszerű bizonyítást, hiszen $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \ldots \pm \binom{n}{n} = (1-1)^n = 0^n = 0$.

Alkalmazások

A bevezetőben már említettük, hogy a hazai oktatásban leginkább a valószínűségek kiszámításához használják a megszámlálási módszereket, míg a „való életben” jellemzőbbek az algoritmuselméleti alkalmazások.

Valószínűségszámítási példa

Három kockával dobunk. Mi a valószínűsége, hogy a dobott számok között lesznek azonosak?

Megoldás: Összesen $6^3 = 216$-féle dobás-hármas van. Könnyebb azt kiszámolni, hogy a dobott számok hányszor különböznek. Ha nincs egyforma szám a dobottak között, akkor $6\cdot5\cdot4 = 120$ lehetőségünk van. Tehát azonosak $216 - 120 = 96$ esetben fordulnak elő. A keresett valószínűség ezért $\frac{96}{216} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$.

Algoritmuselméleti példa

Adott egy n elemű, pozitív egészekből álló halmaz. El kell döntenünk, hogy kiválasztható-e néhány elem, amelyek összege valamilyen adott M szám.

Elemzés: Ha szeretnénk az összes lehetséges részhalmaz összegét kiszámolni, és ez alapján dönteni, akkor összesen 2^n esetet kellene végignéznünk. Ha $n > 50$, akkor a mai számítógépek sebessége mellett ez reménytelen vállalkozás. Következésképpen vagy okosabb algoritmust kell keresnünk, vagy ezt a problémát nem tudjuk hatékonyan megoldani, még számítógéppel sem.