

## Egyenesek

- Írja fel a  $4x + 1001y = 2002$  egyenes és a koordináta-tengelyek által meghatározott háromszög belsejének azon egész koordinátájú pontját, mely az origótól legtávolabb van!
- A  $2x - by = 3$  és  $ax + 4y = 6$  egyenletekben állapítsa meg  $a$  és  $b$  értékét úgy, hogy a két egyenlet a) két különböző párhuzamos egyenes; b) két, egymásra merőleges egyenes; c) ugyanannak az egyenesnek az egyenlete legyen!
- Tükrözze a  $3x - 4y = 4$  egyenletű egyenest a) az  $y$  tengelyre; b) a  $C(1; 6)$  pontra! Írja fel mindkét tükörkép egyenes egyenletét!
- Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a  $(3; 5)$  ponton, a  $3x + 2y - 14 = 0$  és  $3x + 2y - 9 = 0$  egyenletű egyeneseket pedig olyan pontokban metszi, amelyek abszcisszáinak különbsége 1.
- Az  $ABCD$  paralelogramma  $AB$  oldalának egyenlete  $2x + y = 9$ ,  $AD$  oldalának egyenlete  $2x - y = 3$ . A  $BC$  oldal felezőpontja  $E(10; 1)$ . Milyen távol van a paralelogramma középpontja a paralelogramma csúcsaitól?
- Állapítsa meg, hány olyan egyenes van, amely áthalad az  $A(1; 8)$  ponton, és egyenlő távol van a  $P(-3; 5)$  és  $Q(9; -1)$  pontoktól! Írja fel ezeknek az egyeneseknek az egyenletét!
- Egy négyzet egyik csúcsának koordinátái  $(5; 7)$ , egyik átlójának egyenlete  $3x + 4y = 18$ . Írja fel a többi csúcs koordinátáit!
- Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely a koordináta-rendszer kezdőpontja körül rajzolt egységnyi sugarú kört az első síknegyedben érinti, és az  $y$  tengely pozitív feléből kétszer akkora szakaszt vág le, mint az  $x$  tengely pozitív feléből! Számítsa ki az érintési pont koordinátáit!
- Mekkora a területe annak a négyzetnek, amelynek két oldalegyenese az  $5x - 12y + 26 = 0$  és az  $5x - 12y - 65 = 0$  egyenletű egyenes?
- Határozza meg a  $2x - 3y = 2$  egyenletű egyenesnek azt a pontját, amely az  $A(0; 3)$  és  $B(4; 7)$  pontoktól egyenlő távolságra van!
- Számítsa ki az
 
$$y - 10^{-9}x = 10^{-6}, \quad y = 10^{-6}, \quad 2y = 10^{-9}x + 10^{-6}$$
 egyenesek által közrezárt háromszög területét!
- Az  $AB$  szakasz  $A$ -n túli meghosszabbításán vegyünk fel egy  $C$  pontot, és  $C$ -ben emeljünk egy  $g$  merőleges egyenest az  $AB$  egyenesre! Kössük össze a  $g$  egyenes egy  $P$  pontját  $A$ -val és  $B$ -vel! Állítsunk merőlegest  $A$ -ban  $PA$ -ra,  $B$ -ben  $PB$ -re! Állapítsa meg e merőlegesek metszéspontjának mértani helyét, ha a  $P$  pont a  $C$  kivételével befutja a  $g$  egyenes pontjait!

## Körök

- Határozzuk meg az  $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$  egyenletű kör  $P(1; 3)$  pontra vonatkozó tükörképének egyenletét!
- Egy húrnégyszög átlói merőlegesek egymásra. Az átlók metszéspontja  $E(1; 2)$ , a négyszög két szomszédos oldalának egyenlete  $2x + y = 0$ , illetve  $2x - y + 4 = 0$ . Írja fel a négyszög köré írt kör egyenletét!
- Az  $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 25$  és az  $x^2 + y^2 - 16x - 4y + 55 = 0$  egyenletű körök középpontja és metszéspontjai egy négyszöget határoznak meg. Mekkora ennek a négyszögnek a területe?
- Az  $x + 2y = 20$  egyenesnek melyik pontja van az  $x^2 + y^2 = 4$  körvonalhoz legközelebb?
- A  $k_1$  kör egyenlete  $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 20$ , a  $k_2$  kör egyenlete  $(x - 7)^2 + (y - 14)^2 = 5$ . Írja fel annak a körnek az egyenletét, amelynek középpontja a  $k_1$  és  $k_2$  középpontját összekötő egyenesen van, és amelyet a  $k_1$  és  $k_2$  körök belülről érintenek!
- Írja fel annak a körnek az egyenletét, amely átmegy a  $P_1(-1; 3)$  és  $P_2(2; 6)$  pontokon és középpontja illeszkedik a  $2x - y - 1 = 0$  egyenesre!
- Írja fel annak a körnek az egyenletét, amely áthalad a
 
$$2x + 14y = 5; \quad 14x - 2y = 35; \quad 3x - 4y = 20$$
 egyenletű egyenesek páronként vett metszéspontjain!
- Írja fel annak a körnek az egyenletét, amelyet az
 
$$(x - 2)^2 + (y - 9)^2 = 4$$

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$$

$$(x - 9)^2 + (y - 8)^2 = 4$$
 egyenletű körök kívülről érintenek!
- Írja fel annak a körnek az egyenletét, amely átmegy az
 
$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$$
 és az  $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 4 = 0$ 
 körök metszéspontjain, és középpontja az  $x$  tengelyen van!
- Írja fel annak a körnek az egyenletét, amely átmegy az  $A(10; 2)$  ponton, és az  $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$  egyenletű kört a legkisebb ordinátájú pontjában érinti!
- Az  $x^2 + y^2 = 25$  egyenletű körhöz húzzunk érintőket a koordináta-rendszer első síknegyedében. Írja fel annak az érintőnek az egyenletét, amelynek esetén az érintő, valamint az  $x$  és  $y$  tengelyek által határolt háromszög területe a legkisebb! Számítsa ki ezt a területet!
- Írja fel annak a legkisebb körnek az egyenletét, amely érinti az  $x^2 + y^2 = 25$  egyenletű kört és a  $3x + 4y = 75$  egyenletű egyenest!

13. Legyen  $P$  olyan pont, hogy  $P$ -ből az  $x^2 + y^2 = 6y - 6$  és az  $x^2 + y^2 = 2x$  körökhöz húzott érintőknek  $P$ -től az érintési pontokig terjedő szakaszai mind ugyanakkorak. Igazoljuk, hogy az említett tulajdonságokkal rendelkező  $P$  pontok egyenesen helyezkednek el!
14. Az  $A(-1; 0)$  és  $B(1; 0)$  pontok esetén határozzuk meg azon  $P$  pontok mértani helyét a síkon, amelyekre  $PA/PB = 2$ .
12. Jelölje az  $x^2 = 2py$  parabola fókuszpontjára illeszkedő húr végpontjait  $A$  és  $B$ . Igazolja, hogy  $A$  és  $B$  ordinátái szorzatának és abszcisszái szorzatának aránya független a húr egyenesének irányától!
13. A távvezeték vízszintes talajon álló tartóoszlopai 24 m távolságban vannak egymástól, a vezeték „belógása” 1 m. Ha a görbét parabolának tekintjük, mekkora a paramétere? Ha körívnek tekintjük, mekkora a sugara? (\*) Milyen görbe valójában?

## A körökön túl

1. Az  $y = 2x + b$  egyenletű egyenes érinti az  $y = x^2 - 4x + 3$  egyenletű parabolát. Számítsa ki az érintési pontok koordinátáit!
2. Írja fel az  $y = 4x^2 + 4$  parabola origón áthaladó érintőinek egyenletét! Számítsa ki az érintési pontok koordinátáit!
3. Az  $ABCD$  négyzet  $C$  csúcsa a  $2y = x^2 - 5x + 8$ , 25 egyenletű parabola csúcsában,  $B$  és  $D$  szintén a parabolán van. Adja meg a négyzet csúcsainak koordinátáit!
4. Mekkora az  $y^2 = 2px$  parabola  $p$  paramétere, ha a parabola érinti az  $ax + by + c = 0$  egyenest?
5. Az  $y = ax^2 + bx + c$  egyenletű parabolának van két olyan érintője, amelyek átmennek az origón, és merőlegesek egymásra. Bizonyítsa be, hogy az  $ax^2 + bx + c = 0$  egyenlet diszkriminánsa  $-1$ -gyel egyenlő!
6. A  $2xy = 1$  egyenletű hiperbola és az  $y = \frac{17}{3} - 2x$  egyenletű egyenes metszéspontjai  $A$  és  $B$ . Egy egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogója merőleges az  $x$  tengelyre, két csúcsa a hiperbolán, harmadik csúcsa pedig az  $AB$  szakaszon van. Számítsa ki a háromszög csúcsainak koordinátáit!
7. Igazolja, hogy az  $y = 3x + b$  egyenes az  $xy = 4$  hiperbolát  $b$  bármely értékére két pontban metszi! Jelöljük a metszéspontokat  $A$ -val,  $B$ -vel és az egyeneseknek a koordináta-rendszer tengelyeivel való metszéspontját  $C$ -vel és  $D$ -vel. Igazolja, hogy  $AB$  és  $CD$  szakaszok felezőpontjai egybeesnek!
8. Mutassa meg, hogy az  $y = \log_{\sqrt{3}}(7 - 2\sqrt{x} - x)$  egyenletű görbének csak egy olyan pontja van, amelynek mindkét koordinátája egész szám! Melyik ez a pont?
9. Az  $ABC$  szabályos háromszög  $A$  csúcsa az  $y^2 = 8x$  parabola tengelypontja,  $B$ ,  $C$  csúcsa pedig illeszkedik a parabolára. Határozza meg  $B$  és  $C$  koordinátáit!
10. Adott az  $y = 4x^2 + 3x - 5$  egyenletű parabola és az  $5x + y + 12 = 0$  egyenletű egyenes. Határozza meg a parabolának azt az érintőjét, amely párhuzamos az adott egyenessel!
11. Milyen hosszú az  $y = x^2 - 10x + 28$  parabolának az a húrja, amelyik merőleges a parabola 7 abszcisszájú pontjában húzott érintőre?
14. Milyen alakzat egyenlete az  $x^3 + x^2y - y^2 - xy = 0$  egyenlet?

## Térbeli alakzatok

1. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, ami tartalmazza az  $A(-1; 2; 1)$ ,  $B(3; 0; 0)$  és  $C(2; 2; -1)$  pontokat!
2. Adjunk meg feltételt, amivel eldönthető, hogy 4 pont egy síkban van-e.
3. Milyen messze van a  $P(4; -8; -19)$  pont a  $4x + y - 7z = 42$  egyenletű síktól?
4. Hol metszi a  $2x + 3y - z = 2$  egyenletű síkot a  $\underline{v}(t) = (1; 1; -2) + t \cdot (1; 0; 5)$  egyenes?
5. Írjuk fel egy origó középpontú szabályos dodekaéder csúcsainak koordinátáit! Mutassuk meg, hogy a dodekaéder csúcsai 5 csoportba oszthatók úgy, hogy a csoportok egy-egy szabályos tetraédert határoznak meg. Írjuk fel a dodekaéder köréírt és beírt gömbjének egyenletét!
6. Mekkora szöveget zárnak be a következő síkok:  $S_1 : x - 2y - 5z - 7 = 0$ ,  $S_2 : 6x - 2y - 3z - 4 = 0$ ?
7. Írjuk fel egy szabályos oktaéder élleinek egyenletét! Határozzuk meg a kitérő élpárok távolságát!
8. Adott a következő gúla:  $A(0; 0; 0)$ ,  $B(6; 0; 0)$ ,  $C(0; 6; 0)$ ,  $D(6; 6; 0)$ ,  $A(2; 3; 8)$ . Írjuk fel a lapsíkok és az élék egyenletét! Számítsuk ki a lehetséges pont-egyenes, pont-sík és egyenes-egyenes távolságokat.
9. Melyik az a sík, ami átmegy az origón és tartalmazza a
- $$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$$
- rendszerrel leírt egyenest? Mekkora szöveget zár be ez a sík a  $4x + y - z + 3 = 0$  egyenletű síkkal?
10. A  $2x - y + 3z + 3 = 0$  és az  $x + 10y = 21$  síkok metszésvonala  $e$ . A  $2x - y = 0$  és a  $7x + z = 6$  síkok metszésvonala  $f$ . Mutassuk meg, hogy  $e$  és  $f$  metsző, majd írjuk fel síkjuk egyenletét.
11. Egy kocka egy csúcsából kiinduló két élvektora  $(6; 2; -3)$  és  $(-3; 6; -2)$ . Írjuk fel a köréírt gömb egyenletét.
12. Adott az  $A(0; 0; 0)$ ,  $B(3; 0; 0)$ ,  $C(0; 4; 0)$ ,  $D(a; b; 5)$  tetraéder. Mennyi lehet  $a$  és  $b$  értéke, ha tudjuk, hogy a tetraédernek van magasságpontja?