Exponenciális függvény

1. *Egyenletek*
   (a) $4^x = 8 \cdot \sqrt[3]{2}$
   (b) $5^x \cdot 5 = 25^{x-2}$
   (c) $7^{x^2-2x-8} = 1$
   (d) $9^{x+1} = 4 \cdot 6^x$
   (e) $4^{2x-1} \cdot 2^x = 16^x$
   (f) $5^x \cdot 9^{x-1} = 15^x$
   (g) $2^{x+4} + 2^{x+3} + 2^x = 5^{x+1} - 5^x$
   (h) $5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = 31$
   (i) $3^x + 3^{x+2} + 3^{x-1} = \frac{31}{3}$
   (j) $4^x - 7 \cdot 2^x + 8 = 0$
   (k) $9^x + 6 \cdot 3^x - 27 = 0$
   (l) $25^x + 5 = 6 \cdot 5^x$
   (m) $9^{x+\sqrt{x^2+2}} - 4 \cdot 3^{x-1+\sqrt{x^2+2}} = 69$
   (n) $4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x} = 4$
   (o) $\left(\frac{1}{4}\right)^{3x} - \left(\frac{1}{8}\right)^{x-1} = 128$
   (p) $x^{2x^2-7x+6} = 1$
   (q) $2 \cdot \cos^2 \frac{x^2+3y}{6} = 3^x + 3^{-x}$

2. *Egyenletrendszerek*
   (a)
   $$\begin{aligned} 5 \cdot 3^x - 2 \cdot 2^y &= 7 \\ 2 \cdot 3^x + 2^y &= 10 \end{aligned}$$
   (b)
   $$\begin{aligned} 4 \cdot 2^{2x} &= 4^y \\ 10^{xy} &= 10^{10} \cdot 100^{x+1} \end{aligned}$$
   (c)
   $$\begin{aligned} 3 \cdot 5^x - 2^y &= 7 \\ 2 \cdot 5^x + 3 \cdot 2^y &= 34 \end{aligned}$$
   (d)
   $$\begin{aligned} 5^{2x} \cdot 5^y &= 5^5 \\ 6^{x-y} &= 6 \end{aligned}$$

3. *Egyenlőtlenségek*
   (a) $3^{2x-1} > 9$
   (b) $4^{|x|+3} < 16^x$
   (c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} \leq 4$
   (d) $\left(\frac{3}{5}\right)^{x^2-3x+10} > 1$
   (e) $\left(\frac{7}{9}\right)^{2x-3} \geq \frac{9}{7}$
   (f) $9 \cdot 2^{x+4} \leq 2 \cdot 3^{x+5}$
   (g) $25^x - 5^x > 5^{x+1} + 5$
   (h) $(x^2 - x + 1)^{x-2} > 1$

4. *Függvényábrázolás*
   (a) $3^{|x|} + 4^{|x|} = 7^{|x|}$
   (b) $2^x = 2x$
   (c) $3^x = 1 - x$
   (d) $2^{-x} = 1 + x$
   (e) $3^{\frac{x^2-4}{x-2}}$
   (f) $5^{(x+1)^2-2x-x^2}$

5. *Alkalmazások*
   (a) A Föld légkörében a nyomást a magasság függvényében jó közelítéssel a
   $$p(h) = p_0 \cdot e^{-0,125 \cdot h}$$
   függvény adja meg, ahol $p_0 = 10^5$ Pa a tengerszinten mért nyomás, h-t pedig km-ben mérjük.
   - Mekkora a légnyomás 5, 5 km magasságban?
   - Hány %-kal csökken a dobhártyánkra nehezedő légnyomás, ha Szegedről (tengerszint feletti magasság 84 m) felmegyünk a Kékestetőre (tengerszint feletti magasság 1014 m)?

   (b) Ha a 0 időpontban N_0 számú bomlatlan atomot tartalmazott a radioaktív anyag, akkor t idő múlva a még bomlatlan atomok száma
   $$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$
   lesz. λ az anyagra jellemző bomlási állandó, a rádium esetében $\lambda = 4,279 \cdot 10^{-4}$ 1/év.
   100 év allatt hány %-a bomlik el az atomoknak? És 1620 év alatt?

6. *A függvény tulajdonságai*
   (a) Az $1 < a \in \mathbb{R}$ számra $a^x = a^y$. Következik-e ebből, hogy $x = y$?
   (b) Ha a törtkitevős hatványozást nem csak pozitív kitevőre szeretnénk értelmezni, akkor mi lehetne az $f(x) = x^x$ függvény legbővebb értelmezési tartománya?
   (c) A 2^x függvény a negatív x-ekre nagyon lassan nő, pozitív kitevőkre pedig – egy idő után – nagyon gyorsan. Melyik a – növekedési ütem szempontjából – „középső” pont?
   (d) Van-e szimmetriatengelye az a^x függvény grafikonjának?
   (e) Hány metszéspontja lehet egy exponenciális függvény grafikonjának egy egyenessel?
   (f) Egy $f(x) = a^x, x \in [-5; 5]$ exponenciális függvényre $f(-1) = \frac{5}{6}$. Határozzuk meg a függvény értékkészletét!
   (g) Egy $f(x) = a^x + b, x \in [-5; 5]$ exponenciális függvény görbéje az x tengelyt a 2, az y tengelyt a $-\frac{5}{4}$ pontban metszi. Melyik ez a függvény?

(h) Hány pontot kell megadnunk ahhoz, hogy egyértelműen meghatározzák azt az $f(x) = c \cdot a^x$ függvényt, aminek grafikonja áthalad az adott pontokon.

(i) Bizonyítsuk be, hogy ha az $f(x) = a^x$ függvény grafikonjára (a) Y tengelyű merőleges affinitást; (b) X-szel párhuzamos eltolást alkalmazunk, akkor a kapott görbe egy $g(x) = b^x$ függvény grafikonja, megfelelő b esetén.

7. *Egyenletek és egyenlőtlenségek*

(a) $5^{x-1} + 5^{3-x} = 2 \cdot (8 \cdot \cos xy \sin xy + 1)$

(b) $\left(\sqrt{3}+1\right)^x + \left(\sqrt{3}-1\right)^x = 4\left(\sqrt{2}\right)^x$

(c) Határozzuk meg a sík azon $P(x;y)$ pontjainak halmazát, amelyek koordinátáira:
$3^y \le 9^{x+\frac{1}{2}}$ és $\left(\frac{1}{4}\right)^{y+\frac{1}{2}} \le \left(\frac{1}{2}\right)^x$ és $x^2+y^2 \le 4$.

8. *Alkalmazások*

(a) (Svéd érettségi feladat) Egy orvvadász lelőtt egy farkast, és neked kell kivizsgálnod az ügyet. A három gyanúsítottat A, B, C betűkkel jelöltük, és mindnek elfogadható alibije van arra a napra, kivéve a következő időpontokat: A-nak nincs alibije 8.00 és 11.00 óra között, B-nek 11.00 és 15.00 óra között, és C-nek 15.00 és 21.00 óra között.

Hogy meghatározd a halál időpontját, megméred a farkas testhőmérsékletét két alkalommal. Elsőként a halál napján 21.00 órakor. Az ekkor mért hőmérséklet 28°C. Másodszor 3 óra múlva mérsz, 25,6°C-ot.

Tételezzük fel, hogy a farkas testhőmérséklete a halál pillanatától exponenciálisan csökken az idő függvényében. Mivel érdekel a farkasok élete, tudod, hogy egy élő farkas átlagos testhőmérséklete 36,9°C. Tételezzük fel, hogy a külső hőmérséklet közelítően állandó, 0°C.

Kit gyanúsítanál?

(b) (*Hiperbolikus függvények*) A matematika több területén (például a Bolyai-geometriában) hasznosak az úgynevezett *hiperbolikus* függvények:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \qquad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

Ábrázold a függvényeket!

(c) Bizonyítsd be a következő azonosságokat:
$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$
$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$
$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$
$\operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y}$

Logaritmus függvény

1. Bizonyítsuk be a következő azonosságokat és határozzuk meg a kifejezések értelmezési tartományát!

$$a^{\log_a x} = x \tag{1}$$
$$\log_a x + \log_a y = \log_a xy \tag{2}$$
$$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y} \tag{3}$$
$$\log_a x^c = c \cdot \log_a x \tag{4}$$
$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \tag{5}$$
$$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c \tag{6}$$
$$\log_{a^n} b^n = \log_a b \tag{7}$$
$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a} \tag{8}$$

2. Számológép használata nélkül határozzuk meg a következő kifejezések értékét!

(a) $\log_{16} 8$; (b) $\log_{\frac{3}{2}} \frac{4}{9}$;
(c) $\log_{3\sqrt{3}} 243$; (d) $4^{\log_4 128}$;
(e) $2^{\log_4 128}$; (f) $\log_{125} 5$;
(g) $\log_{2\sqrt{2}} 16$; (h) $\log_{\frac{1}{3}} 9$;
(i) $\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{5}$; (j) $\log_2 \frac{2}{3} + \log_2 6$;
(k) $\frac{\log_2 125}{\log_2 25}$; (l) $\frac{2^{\log_4 108}}{2^{\log_4 3}}$.

3. Oldjuk meg a következő egyenleteket és egyenletrendszereket!

(a) $\log_{(x^2-1)}(x^2 - 5x + 6) = 1$
(b) $4\log_x x = \log_x x^4$
(c) $3 \cdot \sqrt[x]{2} = 2^{3+\log_2 24}$
(d) $\log_x 2x + \log_{2x} 4x = \frac{7}{2}$
(e) $[\log_2(x+3)] - \log_2 x = 1$ ($[\ldots]$ az egészrész jele)
(f) $\begin{cases} \lg\left(\frac{x^3}{y^4}\right) = 5 \\ \lg\left(x^2y^5\right) = 11 \end{cases}$
(g) $\begin{cases} \log_{225} x + \log_{64} y = 4 \\ \log_x 225 - \log_y 64 = 1 \end{cases}$

4. Bizonyítsuk be, hogy ha $\log_k x$, $\log_m x$ és $\log_n x$ $(x \ne 1)$ egy számtani sorozat szomszédos elemei, akkor
$$n^2 = (k \cdot n)^{\log_k m}.$$

5. Ha $2\lg(x-2y) = \lg x + \lg y$, akkor mennyi $\frac{x}{y}$ értéke?

6. Ha $f(x) = \log_3(x-1)$ és $g(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$, akkor mi $g(f(x))$ értelmezési tartománya?

7. *Egyenlőtlenségek.*

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket!

(a) $\log_2 x < 1$;

(b) $\log_3(2x-4) \geq 0$;

(c) $\log_{\frac{1}{2}}(5-x) > 0$;

(d) $\log_{0,2}(6x-4) \leq -1$;

(e) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-x-6) > 1$;

(f) $\log_{x-1}(x-3) < 1$;

(g) $\log_8 \frac{x^2-3x}{x-2} \geq \frac{1}{3}$;

(h) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{x^2-8x}{x+2} \leq -\frac{1}{2}$;

(i) $\lg(x+8) \geq \lg(x^2-3x-4)$;

(j) $\log_2 \log_4 x \leq \log_4 \log_2 x$;

(k) $\log_{\frac{1}{x^2}}(x^2-2x-8) \geq 0$;

(l) $\sqrt{\log_2 \frac{3-2x}{1-x}} < 1$.

8. *Számolások logaritmussal.*

A következő műveleteket számológép nélkül, a négyjegyű függvénytábla közelítő értékeinek felhasználásával végezzük el!

a) $1234{,}3^3 \cdot 432$;

b) $\sqrt[4]{\frac{2010}{371}}$;

c) $1234 \cdot \frac{\sqrt{555}}{\sin 0{,}2}$

9. *Alkalmazások.*

a) Egy bankbetét havonta 1% kamatot ír jóvá. Beteszünk 1 millió forintot erre a betétre. Hány év múlva éri el a 2 millió forintot betétünk értéke?

b) A Richter-skála a földrengés erősségének műszeres megfigyelésen alapuló mérőszámát (a *Richter-magnitudót*, vagy más szóval a méretet) adja meg. A magnitudó a földrengéskor a fészekben felszabaduló energia logaritmusával arányos. Az eljárás kidolgozója Charles Richter, eljárását 1935-ben tette közzé. A magnitudó definíciója:

$$M = \log \frac{I}{S},$$

ahol I a földrengés *intenzitása* (a földrengés epicentrumától 100 km-re működő szeizmográf kilengése), S pedig a „standard földrengés” intenzitása(aminek kilengése 1 micron $=10^{-4}$ cm).

A 20. század elején San Francisco-ban $8,3$-as erősségű földrengést mértek a Richter-skála szerint. Ugyanabban az évben Dél-Afrikában négyszer erősebb földrengés volt. Számítsuk ki ennek a földrengésnek a magnitudóját!

10. *Hiperbolikus függvények inverzei.*

Bizonyítsuk be a következő állításokat, és határozzuk meg a függvények értelmezési tartományát, értékkészletét!

$$\mathrm{sh}^{-1}\, x = \mathrm{ar\ sh}\, x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

$$\mathrm{ch}^{-1}\, x = \mathrm{ar\ ch}\, x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$$

$$\mathrm{th}^{-1}\, x = \mathrm{ar\ th}\, x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$\mathrm{cth}^{-1}\, x = \mathrm{ar\ cth}\, x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

Érettségi feladatok

1. Jelölje H a $[0;2\pi[$ intervallumot. Legyen $\mathcal{A}$ a H azon x elemeinek halmaza, amelyekre teljesül a $2^{\sin x} > 1$ egyenlőtlenség, és $\mathcal{B}$ a H halmaz azon részhalmaza, amelynek x elemeire teljesül a $2^{\cos x} < 1$ egyenlőtlenség.

Adja meg az $\mathcal{A}$ halmazt, a $\mathcal{B}$ halmazt és az $\mathcal{A}$ $\mathcal{B}$ halmazt!

2. Egy bank a „Gondoskodás” nevű megtakarítási formáját ajánlja újszülöttek családjának. A megtakarításra vállalkozó családok a gyermek születését követő év első banki napján számlát nyithatnak 100 000 forint összeggel. Minden következő év első banki napján szintén 100 000 forintot kell befizetniük a számlára. Az utolsó befizetés annak az évnek az első banki napján történhet, amely évben a gyermekük betölti a 18. életévét. A bank év végén a számlán lévő összeg után évi 8%-os kamatot ad, amit a következő év első banki napjára ír jóvá.

A gyermek a 18. születésnapját követő év első banki napján férhet hozzá a számlához.

a) Mekkora összeg van ekkor a számlán? A válaszát egész forintra kerekítse!

A gyermek a 18. születésnapját követő év első banki napján felveheti a számláján lévő teljes összeget. Ha nem veszi fel, akkor választhatja a következő lehetőséget is: Hat éven keresztül minden év első banki napján azonos összeget vehet fel. Az első részletet a 18. születésnapját követő év első banki napján veheti fel. A hatodik pénzfelvétellel a számla kiürül. Ha ezt a lehetőséget választja, akkor a bank – az első pénzfelvételtől számítva – minden év végén a számlán lévő összeg után évi 5%-os kamatot garantál, amit a következő év első banki napjára ír jóvá.

b) Ebben az esetben mekkora összeget vehet fel alkalmanként? A válaszát egész forintra kerekítse!

3. Ha az eredetileg I_0 $\left(\frac{\text{watt}}{\text{m}^2}\right)$ intenzitású lézersugár x mm ($x \geq 0$) mélyre hatol egy bizonyos anyagban, akkor ebben a mélységben intenzitása $I(x) = I_0 \cdot 0,1^{\frac{x}{6}}$ $\left(\frac{\text{watt}}{\text{m}^2}\right)$ lesz.

Ezt az anyagot $I_0 = 800$ $\left(\frac{\text{watt}}{\text{m}^2}\right)$ intenzitású lézersugárral világítják meg.

a) Töltse ki az alábbi táblázatot! (Az intenzitásra kapott mérőszámokat egészre kerekítve adja meg!)

x	0	0,3	0,6	1,2	1,5	2,1	3
$I(x)$	800						

b) Mekkora mélységben lesz a behatoló lézersugár intenzitása az eredeti érték (I_0) 15%-a? (A választ tizedmilliméterre kerekítve adja meg!)

4. A tengerparton néhány perccel 12 óra előtt felbocsátottak egy meteorológiai léggömböt, ami a tenger felé sodródva emelkedett. A léggömbön a magasságmérő 842 métert jelzett, amikor Aladár és Béla a tengerparton szögmérő műszerekkel bemérte a léggömb helyzetét pontban 12 órakor. Aladár azt állapította meg, hogy a léggömb 45°-os emelkedési szögben (a vízszintes síkkal bezárt szög) látszik, a léggömb és Béla helyét összekötő szakasz látószöge pedig 60°-os. Béla a léggömböt 30°-os emelkedési szögben látta.

   a) Milyen messze volt egymástól a két szögmérő műszer?

   b) Az Aladár és Béla helyét összekötő szakaszon lévő pontok közül a P pontból láthatták volna maximális emelkedési szögben a léggömböt 12 órakor. Igazolja, hogy P az ABT háromszög T-re illeszkedő magasságának talppontja!

   c) Milyen magasan volt a léggömb 12 óra 30 perckor, amikor a léggömbön lévő légnyomásmérő műszer a tengerszinten lévő légnyomás 80%-át mutatta?

   A légnyomás a tengerszint feletti magasság függvényében a $p(h) = p_0 \cdot e^{Ch}$ képlet alapján számolható, ahol h a méterben mért tengerszint feletti magasságot, p_0 a tengerszinten lévő légnyomást (ezt tekinthetjük 10^5 Pascalnak), e a természetes logaritmus alapszámát ($e \approx 2,718$), C egy tapasztalati konstanst jelent $\left(C = -\frac{1}{7992}\right)$.

Témazáró dolgozatok

Exponenciális függvény

1. Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

   a) $4^x = 0,125 \cdot \sqrt[5]{2}$ b) $4^x + 2^3 = 2^{x+2} + 2^{x+1} + 2^x$

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán: $9 \cdot 2^{x+4} \le 2 \cdot 3^{x+5}$

3. Ábrázold a koordináta-rendszerben azon $P(x; y)$ pontok halmazát, amelyekre teljesülnek a következők: $3^y \le 9^{x+\frac{1}{2}}$ és $\left(\frac{1}{4}\right)^{y+\frac{1}{2}} \le \left(\frac{1}{2}\right)^x$ és $x + y \le 2$

   Hány rácspont van a ponthalmaz határán, illetve belsejében? (Rácspont: egészek a koordinátái.)

4. A C^{14} szén-izotóp felezési ideje 5700 év, bomlási egyenlete: $N(t) = N_0 \cdot e^{-ct}$. Egy régészeti leletben (ami szenet tartalmaz) megmérték a C^{14} mennyiségét, ami egy ma élő fához képest (amiből a szén keletkezett) 63% volt. Hány éves a régészeti lelet?

   (Segítség: Az $a^x = b$ egyenlet megoldása $x = \log_a b$, ami számológéppel így számolható ki: $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$.)

5. Egy orvvadász lelőtt egy farkast, és neked kell kivizsgálnod az ügyet. A három gyanúsítottat A, B, C betűkkel jelöltük, és mindnek elfogadható alibije van arra a napra, kivéve a következő időpontokat: A-nak nincs alibije 8.00 és 11.00 óra között, B-nek 11.00 és 15.00 óra között, és C-nek 15.00 és 21.00 óra között.

   Hogy meghatározd a halál időpontját, megméred a farkas testhőmérsékletét két alkalommal. Elsőként a halál napján 21.00 órakor. Az ekkor mért hőmérséklet 28°C. Másodszor 3 óra múlva mérsz, 25,6°C-ot.

   Tételezzük fel, hogy a farkas testhőmérséklete a halál pillanatától exponenciálisan csökken az idő függvényében (tehát $H(t) = H_0 \cdot e^{-ct}$). Mivel érdekel a farkasok élete, tudod, hogy egy élő farkas átlagos testhőmérséklete 36,9°C.

   Kit gyanúsítanál?

Logaritmus

1. Bizonyítsuk be az

$$\log_a x + \log_a y = \log_a xy$$

   azonosságot, és állapítsuk meg az összefüggés értelmezési tartományát.

2. Határozzuk meg a $g(f(x))$ összetett függvény értelmezési tartományát, ha $f(x) = 7 - 4^{x+1}$ és $g(x) = \log_3(2x - 1)$.

3. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet: $\lg(x + 7) + \lg(3x + 1) = 2$.

4. Magyarországon 1995-ben 204, 1997-ben pedig 339 haláleset hozható kapcsolatba kábítószer fogyasztással. A halálesetek számának exponenciális növekedését feltételezve adjunk előrejelzést a 2010-es évre! (Exponenciális növekedés: $h(t) = h_0 \cdot e^{k \cdot t}$, ahol t években értendő, k pedig a folyamatra jellemző állandó.)

5. Oldjuk meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} 10^y &= x - 3 \\ \lg(x^2 - 4x + 3) &= 2y + 1 \end{aligned}$$