

Kifejezések átalakítása

1. Igazoljuk a következő állításokat:

a) $\sqrt{7+2\sqrt{6}} - \sqrt{7-2\sqrt{6}} = 2$;

b) $\sqrt{7+\sqrt{24}} - \sqrt{7-\sqrt{24}} = 2$;

c) $\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}(3\sqrt{3}-5)}{2}} = 1$;

d) $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} = 2$;

e) $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = 4$.

2. Bizonyítsd be, hogy $(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$ egész szám!

3. Igazoljuk, hogy

$$\begin{aligned} \sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \\ = \sqrt{2}(\sqrt{5}+1). \end{aligned}$$

4. Hozzuk egyszerűbb alakra:

$$\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} + \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}$$

5. Bizonyítsuk be:

a) $\sqrt[3]{1-12} \cdot \sqrt[3]{7} + 6 \cdot \sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{7} = 2$;

b) $\sqrt[3]{1-27} \cdot \sqrt[3]{26} + 9 \cdot \sqrt[3]{26^2} + \sqrt[3]{26} \in \mathbb{Z}$.

6. Igaz vagy hamis? (A gyökök alatt pozitív számok szerepelnek.)

a) $\sqrt[6]{a^5} \cdot \sqrt[5]{a^6} = a \cdot \sqrt[30]{a}$

b) $\sqrt[8]{p^6} \cdot \sqrt[3]{p^5} = \sqrt[24]{p^{23}}$

c) $\sqrt[11]{m^{10}} \cdot \sqrt[10]{m^{11}} = \sqrt[110]{m^{110}}$

d) $\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[9]{x^8}$

e) $\sqrt[n]{a^k} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[2n]{a^{2k+1}}$

Egyenletek, egyenlőtlenségek

1. Oldd meg a valós számok halmazán:

$$x^2 + \sqrt{x^2 - 9} = 21$$

2. Oldd meg a valós számok halmazán:

a) $\sqrt{9-5x} = \sqrt{3-x} + \frac{6}{\sqrt{3-x}}$;

b) $\sqrt{(x-3)(x+2)} = 6$;

c) $\sqrt{(x-3)}\sqrt{(x+2)} = 6$;

d) $\sqrt{x+2} = \frac{6}{\sqrt{x-3}}$;

e) $\sqrt{x-3} = \sqrt{1-x}$;

f) $\sqrt{x-5} = \sqrt{5-x}$;

g) $\sqrt{x+1} + \sqrt{4-5x} = \sqrt{3x-2}$.

3. Milyen valós x -re teljesülnek a következő feltételek?

a) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \frac{1}{100}$;

b) $\sqrt{x} - \sqrt{x-5} > 2$.

c) $\sqrt{-x^2+6x-5} > 8-2x$;

d) $(x+2)\sqrt{x^2-2x+3} \geq 0$;

e) $\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} < 2x+9$.

4. Egy szám négyzetgyöke legfeljebb mennyivel lehet nagyobb a számnál?

5. Határozzuk meg a következő függvények értékkészletét!

a) $\frac{x+1}{x^2+1}$;

b) $2\sqrt{x} + \sqrt{9-2x}$

6. Oldd meg a valós számok halmazán! (p valós paraméter)

$$\sqrt{x-4p+16} = 2\sqrt{x-2p+4} - \sqrt{x}$$

Milyen p értékekre van megoldása az egyenletnek?

7. Oldd meg a valós számok halmazán! (p valós paraméter)

$$\sqrt{x+p} + \sqrt{3p-x} = \sqrt{10p-2x}$$

Milyen p értékekre van megoldása az egyenletnek?

8. Milyen p pozitív egész esetén teljesül, hogy az $f(x) = \sqrt{x^2+p} - \sqrt{x^2+1}$ függvény értékkészlete pontosan 10 egész számot tartalmaz?

Források

- Urbán János *Próbafelvételi tesztek*
- Bényei Károly *Matematika II.*
- Gyapjas Ferenc, Reiman István *Elemi matematikai feladatgyűjtemény*
- Gerócs László, Orosz Gyula, Paróczay József, Szászne Simon Judit: *MATEMATIKA Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.*
- Hajnal-Nemetz-Pintér-Urbán: *Matematika IV.*