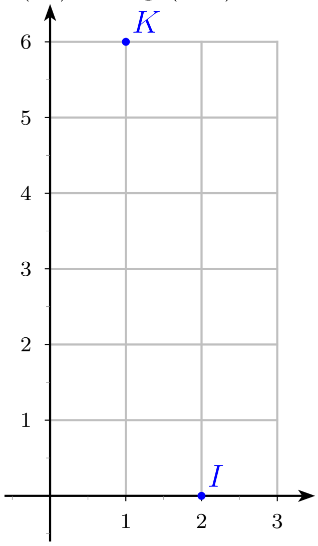
Taxi-geometria

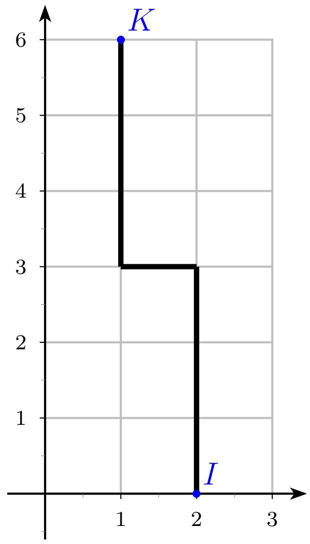
Egy városban az utcák kétfélék: észak-dél vagy kelet-nyugat irányúak. Minden utcának van egy száma (ez a neve), a számozásban csak egészeket használunk, a természetes sorrend szerint.

A városban közlekedő taxisok mindig két kereszteződés között szállítanak utasokat. (A kereszteződések a városi közlekedés csomópontjai, itt találhatók a fontosabb intézmények bejáratai, például könyvtárak, hangversenytermek, iskolák, sportpályák, ...)

A kereszteződéseket számpárokkal lehet megadni: annak az észak-déli és kelet-nyugati utcának a sorszámával, amelyek metszéspontja a kereszteződés. Az ábrán az iskola (I) kereszteződése $(2;0)$ a könyvtáré (K) pedig $(1;6)$.



Két kereszteződés (pont) *taxi-távolságának* a legrövidebb olyan út hosszát nevezzük, amiben a taxis csak az utcákon halad. A fenti példában ez a távolság 7.



Megjegyzés: A taxi-távolságot használó geometriát elsőként Hermann Minkowski vizsgálta, a 19. században. Ezt az euklideszitől különböző metrikát szokás *Manhattan-távolságnak* is nevezni. Ez utóbbi elnevezés onnan ered, hogy Manhattan szigetén az utcák szabályos négyzetrácsot alkotnak, így ha egy taxi a legrövidebb úton akar egy kereszteződésből egy másikba eljutni, akkor éppen a taxi-távolság által megadott hosszúságú úton teheti ezt meg.

Feladatok

1. *Taxi-távolság*

   Jelöljük $d_T(A; B)$-vel az A és B pontok taxi-távolságát! Számoljuk ki a következő taxitávolságokat:

   $A(1; 1)$ és $B(4; 2)$; $A(1; 1)$ és $B(4; 3)$; $A(1; 1)$ és $B(5; 4)$

   $A(-3; 1)$ és $B(4; -1)$; $A(-3; 1)$ és $B(-4; -3)$; $A(-3; 1)$ és $B(-5; 7)$;

   $A(0; 0)$ és $B(0; d)$; $A(0; 0)$ és $B(c; d)$; $A(0; b)$ és $B(c; d)$; $A(a; b)$ és $B(c; d)$

2. *Legrövidebb út*

   a) Mutassuk meg, hogy a taxi-geometriában általában nem egyértelmű két pont között a legrövidebb út!

   b) Milyen pontpárok esetén lesz mégis egyértelmű a legrövidebb út?

   c) Hány különböző legrövidebb út van a következő pontok között?

   $A(1; 1)$ és $B(4; 2)$; $A(1; 1)$ és $B(4; 3)$; $A(1; 1)$ és $B(5; 4)$;

   (*) $P(0; 0)$ és $Q(n; m)$, ahol n és m pozitív egész

   d) Aladár az $A(3; 0)$, Bori pedig a $B(7; 10)$ kereszteződésben áll. Hova beszéljék meg a találkozó T helyét, ha azt szeretnék, hogy a kettőjük által összesen megtett út a lehető legkevesebb legyen?

3. *Taxi-kör*

   Adott a $P(1; 3)$ pont. Hol helyezkednek el azok a Q pontok, amelyekre

   a) $d_T(P; Q) = 1$;

   b) $d_T(P; Q) = 2$;

   c) $d_T(P; Q) = 5$;

   d) $d_T(P; Q) = s$?

   Hogyan néz ki a taxi-geometriában egy „kör” ?

4. *Egyenlő távolságok két pontra*

   a) Adottak az $A(1; 3)$ és $B(7; 3)$ pontok. Hol helyezkednek el azok a C pontok, amelyekre $d_T(A; C) = d_T(B; C)$?

   b) Adottak az $A(1; 3)$ és $B(7; 7)$ pontok. Hol helyezkednek el azok a C pontok, amelyekre $d_T(A; C) = d_T(B; C)$?

5. *Egyenlő távolságok három pontra*

   A város három nevezetes helye a Főtér ($F(-3; -1)$), az Egyetem ($E(3; 3)$) és az Uszoda ($U(4; -4)$). Az új metró egyik megállóját úgy szeretné a városvezetés megterveztetni, hogy egyenlő távol legyen a három nevezetes ponttól? Van remény a sikerre?