0791. MODUL

HOZZÁRENDELÉSEK, FÜGGVÉNYEK, SOROZATOK

Függvények fogalma, ábrázolása; lineáris függvények

KÉSZÍTETTE: PUSZTAI JULIANNA, PARÓCZAY JÓZSEF

MODULLEÍRÁS

A modul célja	A függvényszemlélet fejlesztése, hétköznapi életben, természettudományokban függvénykapcsolatok felismerése, jellemzése. Hozzárendelések vizsgálata, hozzárendelési szabályok felismerése. Tájékozódás a koordinátarendszerben. Függvények különböző ábrázolásai. A lineáris függvény felismerése, grafikonjának biztos megjelenítése.
Időkeret	6 óra
Ajánlott korosztály	7. osztály
Modulkapcsolódási pontok	*Tágabb környezetben*: mindennapjainkban, fizika, kémia, informatika, nyelv *Szűkebb környezetben*: hozzárendelések, halmazok, koordinátarendszer, algebrai kifejezések, műveleti tulajdonságok. *Ajánlott megelőző tevékenységek*: hozzárendelések vizsgálata, pontok ábrázolása koordináta-rendszerben, algebrai kifejezések átalakításai *Ajánlott követő tevékenységek*: magasabb fokú függvények ábrázolása, függvény transzformációk felismerése, használata, összetett függvények jellemzése, függvények inverze.
A képességfejlesztés fókuszai	*Számolás kompetencia*: helyettesítési érték számolása, műveleti tulajdonságok *Mérés, becslés*: táblázatok, grafikonok vizsgálata. *Mennyiségi következtetés*: egyik mennyiség változása milyen változást hoz létre a hozzárendelt értékek körében *Szövegértés, problémamegoldás, metakognició*: gyakorlati problémák, feladatok a hétköznapi életben, ezek matematikai leírása, vizsgálata, matematikai összefüggések keresése *Rendszerezés, kombinativitás*: módszeres próbálkozás a függvényábrázolásokban *Dedukció, indukció*: függvény szabályából következtetés a menetére.

AJÁNLÁS

A függvényekkel való ismerkedés folyamatos munka az első osztálytól kezdődően, elsősorban a számokkal, műveletekkel, számegyenesen és koordinátarendszerben való tájékozódással foglalkozó fejezetekben. Ez a fejezet összefoglalja, megfogalmazza ezeket a régtől érlelt ismereteket majd szervesen továbbfolytatódik a nyolcadik osztályos függvényekről szóló, valamint algebra fejezetekben.
A feladatok itt még a tapasztalatszerzést szolgálják.
Frontális, egyéni és csoportmunka vegyesen (kooperatív módszerek is)

TÁMOGATÓ RENDSZER

Hétköznapi életből gyűjtött példák függvényekre, írásvetítő, feladatlapok, tanári mellékletek

ÉRTÉKELÉS

Az egyéni és csoportos munka során szóbeli értékelés, a téma végén értékelő feladatlap kitöltése

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	**Kiemelt készségek, képességek**	**Eszközök, Feladatok**
I. Megfeleltetések hozzárendelések vizsgálata			
1.	Bemelegítő játékok a hozzárendelések tanításához	Összefüggések, fogalomalkotás, absztrakciós épesség	
2.	Alaphalmaz, képhalmaz, hozzárendelések fajtái	Szövegértés, összefüggések keresése, elemzés	1. Feladatlap 1/a és1/b tanári melléklet
3.	Hozzárendelések egyértelműségének vizsgálata	összefüggések matematikai megfogalmazása	2. Feladatlap
II. A függvény fogalma			
1.	Függvényjáték	tapasztalatgyűjtés, általánosítás	20-30 m hosszú kalapgumi, vagy madzag
2.	Függvényjáték számokkal	számolási készség	2. tanári melléklet
3.	Függvények ábrázolása	elemző képesség	
4.	Összefoglalás	rendszerezés, összefüggések keresése	3. feladatlap
III. Függvények ábrázolása, vizsgálata			
1.	Függvények grafikonjának vizsgálata	grafikonértelmezés	4. feladatlap
2.	Függvények ábrázolása koordinátarendszerben	induktív következtetés	5. feladatlap,6. feladatlap

IV. A lineáris függvények meredekségének vizsgálata			
1.	Az egyenes arányosság grafikonja	Szabályalkotás, -felismerés	7. feladatlap 1., 2.
2.	A függvény meredeksége	Fogalomalkotás, absztrakciós képesség	7. feladatlap 3., 4.
3.	Gyakorlás	táblázatkészítés, elemzés	7. feladatlap 5., 6.

V. A lineáris függvény fogalma, ábrázolása			
1.	Bemelegítő függvényábrázolások	analizálás	8. feladatlap; 3. tanári melléklet
2.	A lineáris függvény fogalma	fogalomalkotás, absztrakciós képesség	9. feladatlap 1.
3.	Konstans függvény	elemzőképesség	9. feladatlap 2., 3

VI. Tartományok a koordinátarendszerben			
1.	Lineáris függvények szabályának kitalálása	függvényszemlélet fejlesztése	
2.	Egyenletek grafikus megoldásának előkészítése	Módszeres próbálgatás	4. tanári melléklet (függvénykártyák)
3.	Egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása	induktív következtetés	10. feladatlap

A FELDOLGOZÁS MENETE

I. Megfeleltetések, hozzárendelések vizsgálata

1. Bemelegítő játékok a hozzárendelések tanításához

A hozzárendelés fogalmának megalapozása – mint minden fogalomé – maradandóbb lehet a tanulók gondolkodásában, ha gyakorlati tevékenységhez kapcsolódik.
Csoportokat nevezünk meg (alakítunk ki) valamilyen közös tulajdonság alapján, és két csoport között kapcsolatot hozunk létre úgy, hogy egyik csoport egy tagjához (eleméhez) hozzárendelünk a másikból valamit. Gyűjtsünk tapasztalatokat ilyen hozzárendelésekről!
Minden esetben beszéljük meg, hogy kik/mik vannak a két csoportban, mi a hozzárendelési szabály, egy gyerekhez hányfélét rendelünk hozzá a másik csoportból!
Például:

– Legyen az első csoport az osztály tanulói, második csoport a hónapok Előre felírhatjuk egy-egy papírlapra a hónapok neveit. Minden tanuló azt a papírt mutassa meg a többieknek, amelyik hónapban született! Megállapíthatjuk, hogy minden tanulóhoz egyetlen hónap kapcsolódik.
– Megfordítva: Rendeljük a hónapokhoz a tanulókat! első csoport a hónapok, második csoport az osztály tanulói. Álljanak ahhoz a hónapcédulához, amelyikben a születésnapjuk van! Most egy hónapbeli elemhez több tanuló is kapcsolódik.

– Legyen az egyik csoport a matematika órán használatos táblai eszközök halmaza (tábla, kréta, szivacs, körző, vonalzók), a másik csoport az osztály tanulói. Válasszunk ki az első csoportból egy elemet, mondjuk a táblát, és kérjük meg a gyerekeket, hogy jöjjön ki, tegye kezét a táblára az a tanuló aki a mai napon a táblánál dolgozott! Majd ugyanígy a többi tárggyal is megfigyeljük hozzárendeléseket. Megállapíthatjuk, hogy ha 1-1 eszközt több tanuló is hsznált, egy bizonyos eszközhöz több tanuló is kapcsolódik. Az is lehet, hogy valamelyik eszközt ma nem használta senki, de az is előfordulhat, hogy vannak tanulók, akik ma nem használtak egyetlen eszközt sem.

– Legyen az első csoport az osztály névsorának első 10 tanulója (álljanak ki az osztály elé), a második csoportban pedig legyen 10 db tolltartó, amit a tanár találomra összeszed és a tanári asztalra felhalmoz. az első csoport minden tanulója egyenként menjen az asztalhoz és vigye helyére a saját tulajdonát képező tolltartóját!
Valószínű, hogy lesz olyan tanuló, akinek nincs kinn tolltartója, és marad olyan tolltartó, amelyiknek az adott 10 gyerek közül nincs gazdája.

Számokkal is adjunk feladatot!

– Először legyen az első csoport az osztály tanulói, a második csoport pedig egy számhalmaz, amelyben a pozitív egész számok vannak 1-től kezdve sorban. A legnagyobb az osztály létszámának megfelelő szám. Minden tanulóhoz kapcsoljuk hozzá azt a számot, amely megmutatja, hogy ő hányadik a névsorban. Mindenki írja a saját számát filctollal, jó nagy számjegyekkel egy írólapra, és tűzze magára (tartsa maga előtt).

Ezután a számokkal alakítunk csoportokat, és a gyerekek viszik a számokat a megfelelő utasítás szerint létrehozva a számok közötti hozzárendelést. Ne egyszerre, hanem egymás után válasszák ki a párjukat, hogy mindenki követni tudja a kapcsolatokat. Például:

– Első csoport a 3 többszörösei, második csoport a többiek. Minden első csoportbeli számhoz kapcsolódjon a nála 2-vel kisebb!
– Első halmaz a prímszámok, második a többiek. Minden első halmazbeli számhoz (amelyikhez lehet) rendeljük hozzá a 2-szeresét!
– Első halmaz a15-nél nem kisebb számok, második a többiek. Minden első csoportbeli számhoz rendeljük hozzá a prímosztóját! (Lesz, akihez többen kapcsolódnak, lesz, akihez senki.)

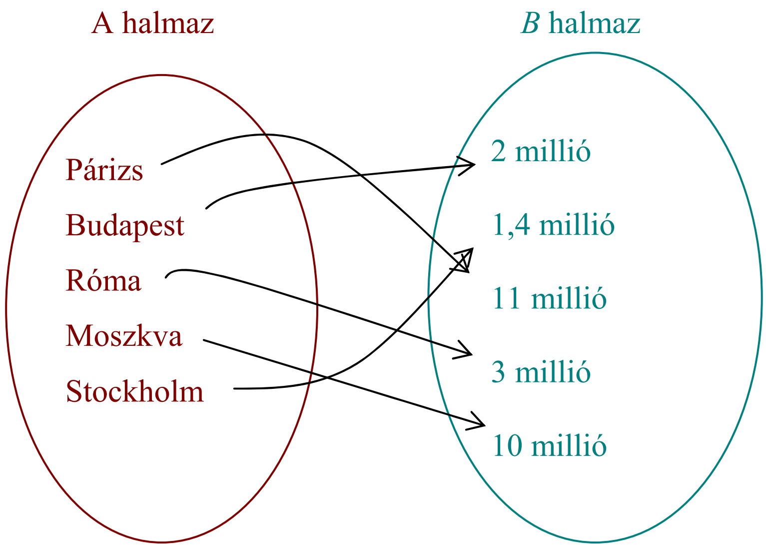
Ezután összegezzük a tapasztalatokat, az előbbi játékok példái alapján! (Frontális beszélgetés.)
– Mindenekelőtt szükséges a halmaz fogalmának felelevenítése.
Halmaz: valamilyen közös tulajdonság alapján egy csoportba tartozó dolgok, tárgyak, jelenségek, számok stb. összessége. Jelölése: A, B, H, … az ábécé nagybetűi. Soroljuk fel, hogy a játékainkban milyen halmazok szerepeltek, és jelöléssel minden tanuló írjon fel egy két halmazt a füzetébe! Pl.: A = {tanulók}, B = {hónapok}, vagy $P = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17\}$, T = {a 30-nál kisebb természetes számok}.
– Két különböző halmaz (vagy egyazon halmaz) elemei között lehetnek összefüggések, kapcsolatok, valamilyen szabály alapján Soroljunk fel ezekből is példákat! Mutassuk meg a nyilas jelölést, írjunk le egy-két kapcsolatot! Például: a tanulóhoz azt a hónapot kapcsoljuk, amelyikben született. Jelöléssel: Pisti $\rightarrow$ május

2. Alaphalmaz, képhalmaz, hozzárendelések fajtái

Az 1. feladatlap megoldása során vizsgáljuk meg a különféle hozzárendeléseket, ismerkedjünk különböző megadásmódokkal, ábrázolásokkal! A tanulók dolgozzanak csoportban úgy, hogy minden feladatot megbeszélnek együtt, majd önállóan oldják meg. A 4. feladatot a lassabban haladók kihagyhatják.
A megoldásokat ellenőrizzük frontálisan is, és beszéljük meg, hogy miben egyeznek meg a feladatokban szereplő egyes hozzárendelések, és miben térnek el írásvetítő fólia (1/a 1/b tanári melléklet) segítségével!

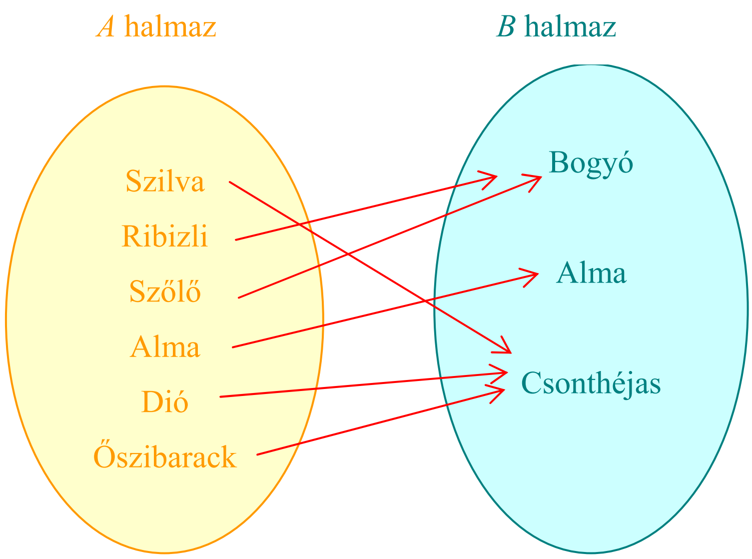
1. FELADATLAP

1. Megadtunk két halmazt. Az A halmaz néhány európai nagyváros nevét tartalmazza, a B halmaz számokat. Az A halmaz elemeihez úgy rendeltük a B halmaz elemeit, hogy azok a nagyvárosok népességét mutassák. Sorold fel mindkét halmaz elemeit! Írd le a „$\rightarrow$” jelöléssel, hogy az A halmaz elemeinek melyik B halmaz-beli elem felel meg!

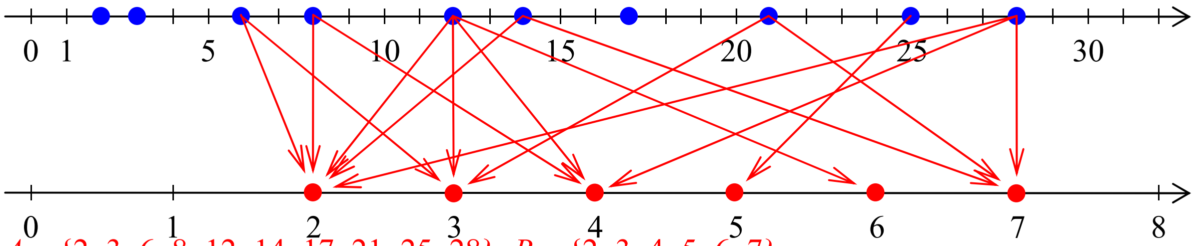


A halmaz: *A* = {Párizs; Budapest; Róma; Moszkva; Stockholm}
B halmaz: *B* = {2 millió; 1,4 millió; 11 millió; 3 millió; 10 millió}
Párizs → 11 millió; Budapest → 2 millió; Róma → 3 millió; Moszkva → 3 millió;
Stokholm → 1,4 millió

2. Az *A* halmaz elemei gyümölcsök, a *B* halmaz elemei termések. Jelöld nyíllal a halmazábrán, hogy melyik gyümölcs melyik terméstípushoz tartozik!
A = {szilva; ribizli; szőlő; alma; dió; őszibarack}
B = {bogyó; alma; csonthéjas}

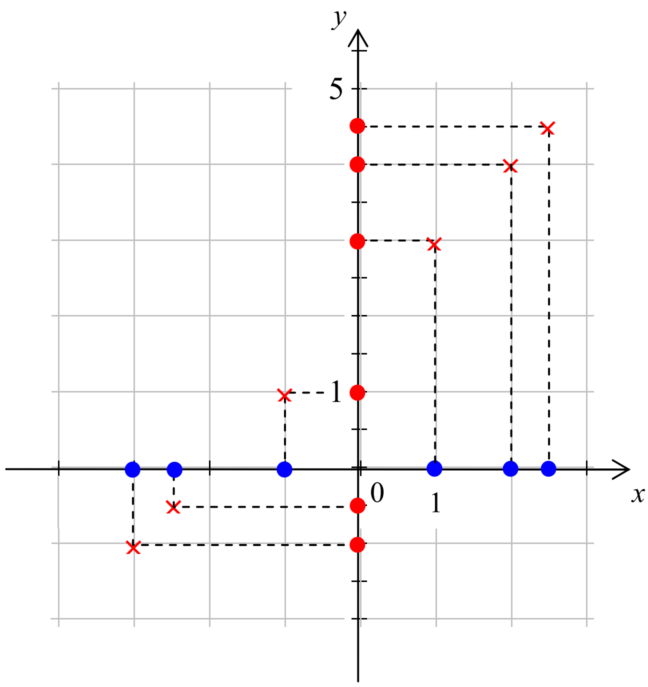


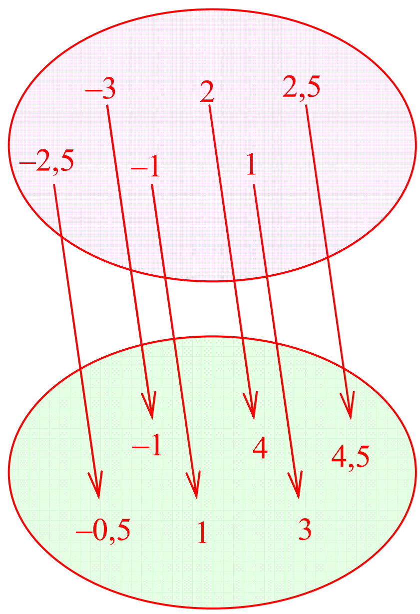
3. Az *A* halmaz elemeit az első számegyenesen kék ponttal jeleztük. A *B* halmaz elemei a második számegyenesen vannak, ezeket nem jelöltük meg. Az *A* halmaz minden eleméhez rendeljük hozzá a valódi osztóit! Jelöld nyíllal ezt a kapcsolatot!
Sorold fel mindkét halmaz elemeit!



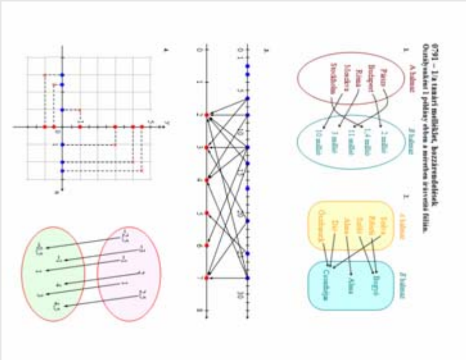
A = {2; 3; 6; 8; 12; 14; 17; 21; 25; 28}; *B* = {2; 3; 4; 5; 6; 7}

4. Ebben a feladatban a hozzárendelést számpárokkal adtuk meg: minden számpár első jelzőszámához a második jelzőszámát rendeljük hozzá.
(–3; –1); (–2,5; –0,5); (–1; 1); (1; 3); (2; 4); (2,5; 4,5).
Add meg az *A* és *B* halmazt elemeik felsorolásával, és írd le, hogy milyen szabály szerint rendeltük az *A* halmaz elemeihez a *B* elemeit! Ábrázold ezt a kapcsolatot derékszögű koordinátarendszerben úgy, hogy az *x*-tengelyen az *A* halmaz, az *y*-tengelyen a *B* halmaz elemei legyenek! Rajzold meg halmazábrán is ezt az összefüggést!
A = {–3; –2,5; –1; 1; 2; 2,5}; *B* = {–1; –0,5; 1; 3; 4; 4,5}
Minden *A*-beli elemhez a nála 2-vel nagyobb számot rendeljük.





1/a, 1/b tanári mellékletek – lásd a modul eszközei közt!



Milyen egyezéseket és milyen eltéréseket vehetünk észre ezek között a feladatok között?
Egyezések:
Minden esetben két halmazt adtunk meg, és megmondtuk, hogy az *A* halmaz elemeinek milyen *B* halmaz-beli elemeket feleltetünk meg (vagyis egy utasítást illetve szabályt). Ezzel mindegyik feladatban hozzárendelést valósítottunk meg a halmazok között.
Közöljük, hogy az *A* halmaz neve alaphalmaz, a *B* halmaz neve képhalmaz!
Eltérések:
Az ábrákon is jól látszik: egy *A*-beli elemből pontosan egy *B*-beli elemhez mutat nyíl, vagy egy *A*-beli elemből több *B*-beli elemhez is mutat nyíl, vagy több *A*-beli elemből pontosan egy *B*-beli elemhez mutat nyíl.
– az 1. és 4. feladatban az *A* halmaz minden eleméhez pontosan egy *B*-beli elem tartozik (minden *A*-beli elemből pontosan egy *B*-beli elemhez mutat nyíl, az *x*- tengely egy pontjához pontosan egy *y* érték tartozik): az ilyen hozzárendelést egyértelmű hozzárendelésnek nevezzük;
– a 3. feladatban egyes *A*-beli elemekhez több *B*-beli elem is tartozik (az első számegyenes néhány pontjából több másodikszámegyenes-ponthoz is mutat nyíl): az ilyen hozzárendelést többértelmű hozzárendelésnek nevezzük;
– a 2. feladatban is pontosan egy *B*-beli elemet választhattunk minden *A*-beli elemhez, így ez is egyértelmű hozzárendelés. De voltak olyan *B*-beli elemek is (pl. csonthéjas, bogyó), amelyekhez az *A* több elemétől mutatott nyíl $\Rightarrow$ ez a hozzárendelés visszafelé nem egyértelmű.

Megbeszélhetjük, hogy az 1. (az ott adott halmazelemekkel) és a 4. feladat oda-vissza egyértelmű, ezt kölcsönösen egyértelmű hozzárendelésnek nevezzük.
Az 1/b tanári melléklet feliratait kivágjuk, és ráhelyezzük az 1/a fóliára, a megoldásokhoz; így nemcsak szóban hallják, de írásban is látják ezeket az új fogalmakat, és tudják őket mihez kapcsolni. Ezekkel a feliratokkal a gyerekek is egészítsék ki megoldásaikat a saját munkafüzetükben! (5. feladat)

5. Válogasd ki az előző hozzárendelések közül az egyértelműeket!
Egyértelmű hozzárendelések az 1., 2., 4. feladatok

3. Hozzárendelések egyértelműségének vizsgálata

A megismert alapfogalmak begyakorlására szolgál a következő feladatlap. A tanulók párosával dolgoznak, egymással megbeszélik a megoldásaikat.
Amennyiben az órán nincs idő rá, adhatjuk házi feladatnak. Házi feladatot válogathatunk még a feladatgyűjtemény 1-4. feladatai közül.

Szorgalmi házi feladatnak adjuk, hogy gyújtsanak meg egy gyertyát mondjuk, (ne legyen túl vastag) és figyeljék meg, hogyan függ a magassága az időtől. Mérjék meg a magasságot az elején, majd mondjuk minden negyed órában (a gyertya vastagságától függően esetleg 5-10 percenként) és kérjük meg a szorgalmit vállaló gyerekeket, hogy írásvetítő fóliára készítsenek táblázatot a mérésükről. (Egy ilyen táblázatot készítsen a tanár is arra az esetre, ha egyetlen egy gyerek sem készítene szorgalmi házit.)

2. FELADATLAP

1. Az alábbi hozzárendelések közül melyek egyértelműek? Írjátok le a füzetetekbe a kapcsolódó elemeket a „→” jelöléssel!

a) Alaphalmaz: évszakok. Képhalmaz: a hónapok.
Hozzárendelés: minden évszakhoz rendeljük hozzá a hónapok közül a hozzá tartozót! Tavasz → március, április, május; nyár → június, július, augusztus; ősz → szeptember, október, november; tél→ december, január, február. Nem egyértelmű hozzárendelés.

b) Alaphalmaz: a tanult tantárgyak. Képhalmaz: a hét munkanapjai.
Hozzárendelés: minden tantárgyhoz rendeljük hozzá azt a napot, amikor órarend szerinti óra van! Nem egyértelmű hozzárendelés.

c) Alaphalmaz: a háromnál kisebb abszolút értékű egész számok.
Képhalmaz: az ötnél kisebb nem negatív egész számok.
Hozzárendelés: minden alaphalmazbeli elemhez rendeljük hozzá a négyzetét!
$-2 \to 4$; $-1 \to 1$; $0 \to 0$; $1 \to 1$ $2 \to 4$; Egyértelmű hozzárendelés.

d) Alaphalmaz: $\{2{,}1; \frac{24}{5}; 5{,}3; 6\}$. Képhalmaz: az első 10 természetes szám.
Hozzárendelés: Az alaphalmaz minden eleméhez rendeljük hozzá a nála legalább hárommal nagyobb képhalmazbeli számot!
$2{,}1 \to 6$; $2{,}1 \to 7$; $2{,}1 \to 8$; $2{,}1 \to 9$; $\frac{24}{5} \to 8$; $\frac{24}{5} \to 9$; $5{,}3 \to 9$; $6 \to 9$. Nem egyértelmű.

e) Alaphalmaz: az 50-nél kisebb természetes számok.
Képhalmaz: a 25-nél kisebb természetes számok.
Hozzárendelés: Az alaphalmaz minden eleméhez rendeljük hozzá a valódi osztóinak számát!
Például: 4→1; 5→ 0; 6 →2; 7→0; 8→2; ... Olyan sok elempár van, hogy – bár mindegyiket le tudnánk írni – az egyértelműség megállapításához erre nincs szükség. Ez egyértelmű hozzárendelés.

2. A következő halmazok elemei között létesíts egyértelmű hozzárendelést! Add meg a hozzárendelés szabályát, majd szemléltesd Venn-diagramon az elemek kapcsolatát!

a) A = {banán, kivi, eper, málna, meggy, narancs}
B = {piros, bordó, sárga, narancs, zöld}

b) $A = \{2; -3; 4; 3; -4\}$
$B = \{2; 3; 4\}$

c) A = {oxigén, széndioxid, levegő, limonádé}
B = {elem, keverék, vegyület}

Például a hozzárendelési szabály lehet:

a) minden (érett) gyümölcshöz rendeljük hozzá a legjellemzőbb színét!
b) minden számhoz rendeljük hozzá az abszolút értékét!
c) oxigén→elem, levegő→keverék, széndioxid→vegyület, limonádé→keverék

II. A függvény fogalma

1. Függvényjáték

A házi feladat frontális ellenőrzése után bemelegítő játékkal készítjük elő a függvényfogalom kialakulását. (A szorgalmi feladat megbeszélésére később kerül sor.)

a) A tanulók álljanak két sorba, egymással szembe (körülbelül 2 m távolságra egymástól), egy tanulót pedig nevezzünk ki „rendező”-nek. Az egyik tanulói sort nevezzük alaphalmaznak, a másikat képhalmaznak. Az alaphalmazban lévő gyerekek kapjanak a kezükbe 1-2 m hosszú vékony gumiszálat (kalapgumit), amelynek egyik végére kössünk egy papírlapot (mintha cicának készítenénk játékot). A tanár elmondja, hogy az alaphalmaz elmeihez a képhalmaz elemeit fogjuk hozzárendelni különböző szabályok alapján. A „rendező” feladata, hogy tetszőleges sorrendben kiválassza az aktuális hozzárendelésben részt vevő alaphalmaz-beli gyerekeket. A hozzárendelés pedig úgy történik, hogy ezek az alaphalmaz-beli gyerekek a gumiszáljukra kötött papírmasnit odaadják a megadott szabály alapján hozzájuk rendelődő képhalmaz-beli társuknak, majd visszamennek a helyükre. (A másik gumiszálvéget ők fogják, erősen, hogy ki ne csússzon a kezükből.) Így szemléletessé válik a (függvény-) kapcsolatuk, és az is, hogy ki függ kitől. A „rendező” minden kapcsolódás után ellenőrzi, hogy az illető valóban megfelelő párt választott-e magának.

Azt is megmondjuk, hogy minden esetben egyértelmű hozzárendelést adunk.
A hozzárendelés szabályai lehetnek például:
Minden alaphalmaz-beli elemhez rendeljük a képhalmazból a hozzá legközelebb állót, a szembenlevőtől balra állót, azt, aki a szembenlevőnél alacsonyabbak közt a legmagasabb, a középsőt, a középpontos tükörképet (ha a „rendező”-t középpontba állítjuk, sorbanállás helye szerinti középpontos tükörképét). Nagyon sok lehetőség van.

b) Ezután beszéljük meg a szorgalmi feladatban szerzett tapasztalatokat! Vetítsünk ki írásvetítővel egy behozott táblázatot, figyeljük az idő és az adott gyertya magassága összefüggését! Megállapítjuk, hogy ahogy telt az idő, a meggyújtott gyertya magassága egyre kisebb lett. Kérdezzünk különböző időpontokhoz tartozó gyertyamagasságokra (félidőben, 13. percben, utolsó előtti percben, 1 perc múlva, fél perc múlva stb.), hogy a folyamatosan változó mennyiségek közötti kapcsolatokat is megérezzék tanulóink. Szerencsés, ha több mérési eredmény áll rendelkezésünkre, több táblázaton is megfigyelhetjük az összefüggést. Beszéljünk arról is, hogy az idő pontjai az alaphalmaz elemei, ha kiválasztunk egy időpontot, az egyértelműen meghatározza a hozzá tartozó gyertyamagasságot. Az eltelt időtől függ, hogy milyen magas a gyertyánk.

2. Függvényjáték számokkal

Ebben a játékban 10 tanuló játszik, a többiek nézők. Minden menetben cserélődnek a játékosok és a nézők, valamint a játékban szereplő számkártyák.
Az asztalra két dobozt teszünk, jól láthatóan egyikre ráírjuk, hogy „ x” a másikra „y”.
Megmondjuk, hogy az x doboz az alaphalmaz, az y a képhalmaz elemeit tartalmazza.
Kihívunk 10 tanulót, és megkérjük őket, hogy párban álljanak. A pár egyik tagja lesz az „x”, másik az „y”.Mindkét dobozba 5-5 számkártyát teszünk. Most a tanár mond egy hozzárendelési szabályt. Az első pár „x” tagja kihúz egy számkártyát az „x” dobozból, megmutatja a párjának és a nézőknek is. Hangosan meg is mondhatja, hogy x = mennyivel.
Ezután a párja megy az „y” dobozhoz, és kikeresi azt számkártyát, amelyen az a szám szerepel, amivel ő az adott szabály szerint a párjához tartozik. Megmutatja a párjának és a

nézőknek. Ki is mondja, hogy y = mennyi. Ha jól számolt, gumiszállal lehet a kapcsolatukat megjeleníteni. Ez a két tanuló tűzze magára vagy tartsa maga előtt a számkártyáját (esetleg kössék fel a homlokukra, mint a számháborúban). Jöhet a következő páros, akik ugyanígy járnak el.
A számkártyákat a 2. tanári melléklet tartalmazza, úgy állítottuk össze, hogy a következő hozzárendelési szabályoknak legyen megfelelő:

2. tanári melléklet – lásd a modul eszközei közt!

1. az alaphalmaz: 5; –2; $\frac{1}{2}$; –8,2; 20. világoskék kártyák,
   a képhalmaz: –25; 10; –2,5; 41; –100 világos rózsaszín alapon,
   a szabály: minden x-hez az ötszörösének az ellentettjét rendeljük hozzá.
2. az alaphalmaz: 5; –2; $\frac{1}{2}$; –8,2; 20. világoskék kártyák, ugyanaz, mint előbb,
   a képhalmaz: 7,5; –3; $\frac{3}{4}$; –12,3; 30, sötétebb rózsaszín
   a szabály: minden x-hez rendeljük hozzá a felének a háromszorosát.

3. az alaphalmaz: 4; 10; –2; –18; 0, középkék
   a képhalmaz: 2; 5; –1; –9; 0, világosszürke
   a szabály: minden x-hez rendeljük hozzá a felét.

A harmadik játék után az előbbi x kártyákat tegyük y dobozba és az y kártyákat tegyük az x dobozba!

4. az alaphalmaz: 2; 5; –1; –9; 0, világos szürke
   a képhalmaz: 4; 10; –2; –18; 0, középkék
   a szabály: minden x-hez rendeljük hozzá a kétszeresét!

3. Függvények ábrázolása

Ezt az utolsó játékot írásban is rögzítjük. A nézők közül választunk három szépen író jegyzőt, akik a táblára írják az összetartozó értékpárokat más-más lejegyzési módban: az elemek egymáshoz rendelésével, értéktáblázattal és számpárokkal. A tanulók is írják le a füzetükbe!

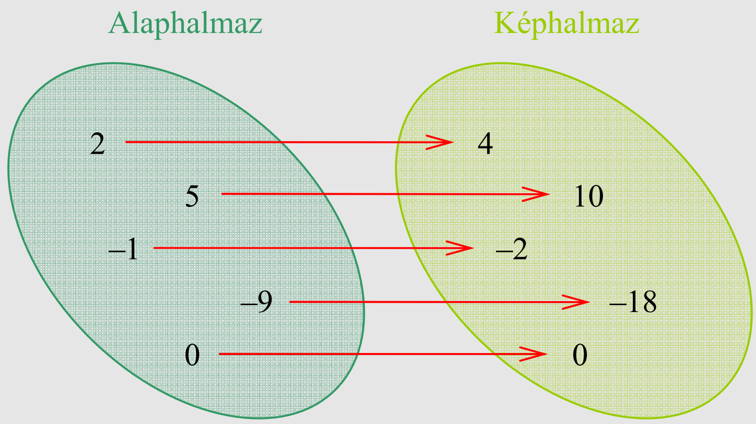
$x \mapsto 2x$ hozzárendelési szabály esetén:

$$\begin{array}{ccc} x & \mapsto & 2x \\ 2 & \mapsto & 4 \\ 5 & \mapsto & 10 \\ -1 & \mapsto & -2 \\ -9 & \mapsto & -18 \\ 0 & \mapsto & 0 \end{array}$$

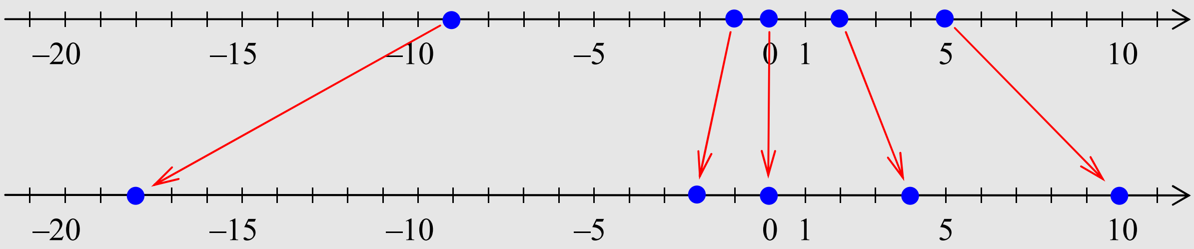
x	2	5	–1	–9	0
$y = 2x$	4	10	–2	–18	0

(x ; y)
(2; 4)
(5; 10)
(–1; –2)
(–9; –18)
(0; 0)

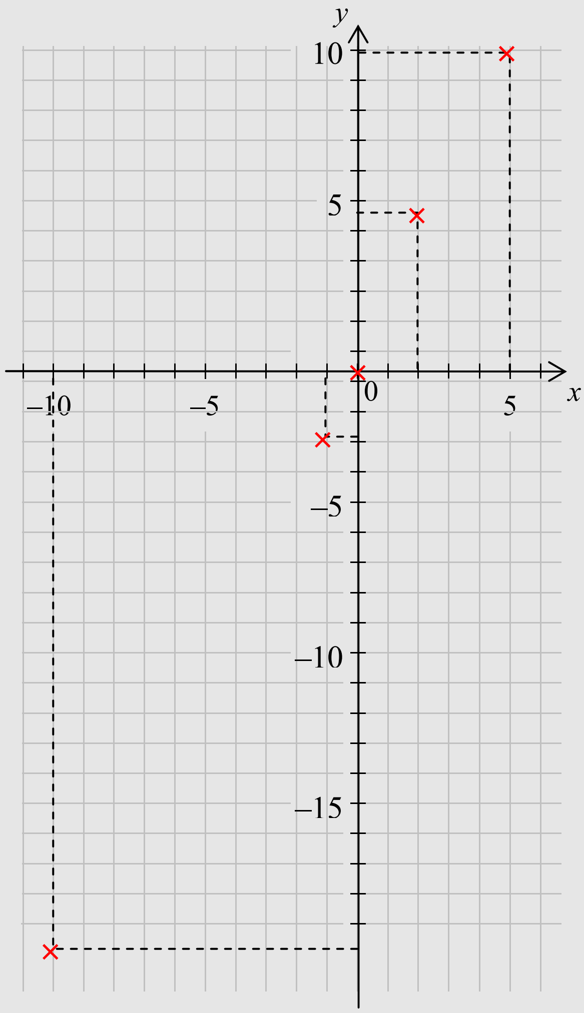
a) Beszéljük meg a játék során tapasztaltakat! Hangsúlyozzuk, hogy ezek egyértelmű hozzárendelések voltak, olyan kapcsolatok, amelyekben az alaphalmaz értékeihez csak egy érték tartozik a képhalmazból. (Egy, vagy egy sem.)
Ábrázoljuk Venn-diagrammal!



b) Az $x \mapsto 2x$ hozzárendelést ábrázolhatjuk két számegyenesen is. (Mint amikor a gyerekek egymással szemben gumiszalaggal összekapcsolva álltak.)



c) A játékokban az alaphalmaz elemeit x-szel, a képhalmaz elemeit y-nal jelöltük.
Ha kiválasztunk egy értéket az alaphalmazból, akkor az – a szabály alapján – meghatározza a képhalmaz hozzátartozó értékét, vagyis x meghatározza y-t, ***y* az *x*-től függ**, ezért hívhatjuk az egyértelmű hozzárendelést **függvény**nek is. Jól látható ez az értéktáblázat alapján (***y* = 2*x***), és a számpáros feljegyzésben.
Ábrázoljuk koordinátarendszerben is ezt a függvényt!



4. Összefoglalás

Röviden foglaljuk össze az eddig szerzett ismereteket!

Az **egyértelmű hozzárendelést függvénynek** nevezzük.
Egy függvény akkor adott, ha megadunk: egy **alaphalmaz**t, és egy **képhalmaz**t, valamint egy hozzárendelési **szabály**t, amely szerint minden alaphalmaz-beli elemhez pontosan egy képhalmaz-beli elem kapcsolódik.
A hozzárendelési szabályt felírhatjuk $\mapsto$ jelöléssel, pl.: $x \mapsto 2x$, vagy megadhatjuk képlettel is, pl.: $y = 2x$
Az alaphalmaz elemeihez tartozó képhalmazbeli elemeket **függvényérték**eknek nevezzük.

TUDNIVALÓ

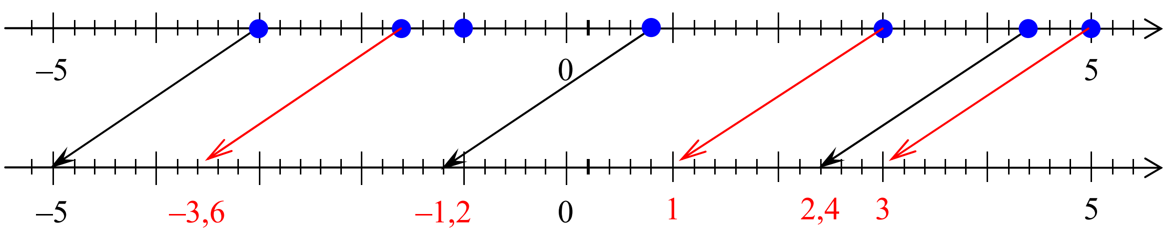
Az egyértelmű hozzárendelést **függvénynek** nevezzük.
A hozzárendelési szabály minden alaphalmaz-beli elemhez pontosan egy képhalmaz-beli elemet, a **függvényértéket** rendeli.

Ha van idő, akkor az órán, ha nincs, akkor házi feladatként adjuk fel a 3. feladatlapot! Házi feladatot válogathatunk még a feladatgyűjtemény 5-9. feladatai közül.

3. FELADATLAP

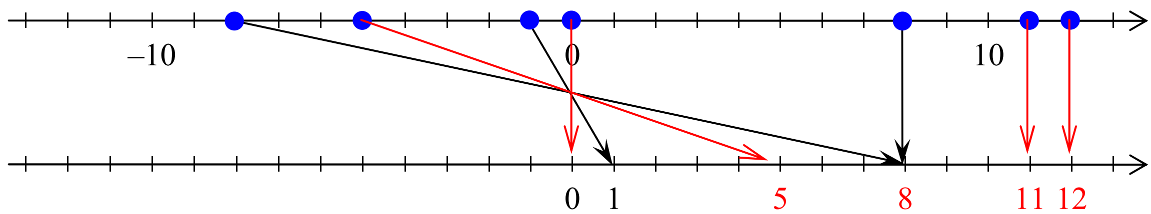
1. A következő ábrákról három függvény összetartozó értékeit olvashatod le. Az első számegyenes az alaphalmaz, a második számegyenes a képhalmaz elemeit tartalmazza. Nyilakkal jelöltünk néhány összetartozó elempárt. Add meg a három hozzárendelés szabályát, rajzold be a hiányzó nyilakat, és írd be a függvényértékeket!

a)



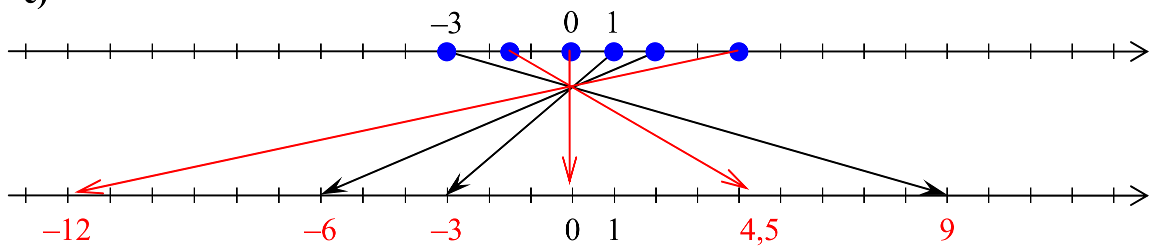
Rendeljük az alaphalmaz minden eleméhez a nála 2-vel kisebb számot!

b)



Rendeljük az alaphalmaz minden eleméhez az abszolút értékét!

c)

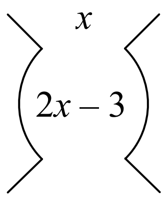


Rendeljük az alaphalmaz minden eleméhez a –3-szorosát!

A 2. feladattal bővítjük az alaphalmazt és a képhalmazt

2. A különböző játékgépek különböző szabállyal dolgoznak. „Dobjuk be” a játékgépbe egyenként az alaphalmaz (A) néhány elemét! Számítsuk ki a gép saját működési szabálya alapján a bedobott számhoz tartozó, kijövő (K-beli) elemet!
Töltsétek ki a táblázatot, amelynek felső sorában a bedobott számok, az alsóban pedig a kiadott számok szerepelnek!

a)



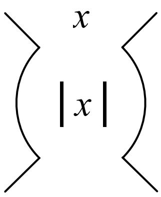
A = {8-nál kisebb nem negatív egész számok}
K = {egész számok}

Hozzárendelési szabály: minden A-beli számhoz rendeljük hozzá a kétszeresénél 3-mal kisebb számot!

x	0	1	2	3	4	5	6	7	10	50	100	125	...
y	–3	–1	1	3	5	7	9	11	17	97	197	247	...

Mi lenne a függvényérték, ha a gép befogadóképessége nagyobb lenne, és elfogadná pl. a 10, 50, 100, 125 számokat is?

b)



A = {–6-nál nem kisebb negatív egész számok}
K = {egész számok}

Hozzárendelési szabály: rendeljük hozzá minden A-beli számhoz az abszolút értékét!
Mely számok lesznek a függvényértékek halmazában?

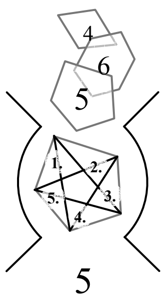
x	–6	–5	–4	–3	–2	–1	–7	–10	–52	–100	–1977	–10 000	...
y	6	5	4	3	2	1	7	10	52	100	1977	10 000	...

Az függvényértékek halmazának elemei: 6; 5; 4; 3; 2; 1.

Ha a gép elfogadja a –6-nál kisebb egész számokat is, hogyan határoznád meg az alaphalmazt, és ebben az esetben mi lenne a képhalmaz? Egészítsd ki az értéktáblázatot néhány ilyen számpárral!

Az A halmaz a negatív egész számok halmazára bővülne, a képhalmaz változatlan maradna.

c)



A = {sokszögek oldalszáma}
K = {természetes számok}

Hozzárendelés: minden (adott oldalszámú) sokszöghöz rendeljük hozzá az átlóinak a számát! Az ábra a gép működésének egy pillanatfelvétele.
Hány eleme lehet az alaphalmaznak, hány a képhalmaznak? Függvény-e ez a hozzárendelés? Miért? Vannak-e a a képhalmaznak „kimaradó” elemei, vagyis olyan természetes számok, amelyek nem értékei az adott függvénynek?

sokszög oldalszáma	3	4	5	6	7	8	9	10	20	24	50	100	...
sokszög átlóinak száma	0	2	5	9	14	20	27	35	170	252	1175	4850	...

Mind az alaphalmaznak, mind a képhalmaznak végtelen sok eleme lehet.
Ez a hozzárendelés függvény: minden alaphalmaz-beli elemhez pontosan egy képhalmaz-beli elemet rendel.
Igen, a képhalmazból sok természetes szám kimarad, pl.: 1; 3; 4; 6; 7; 8; ...

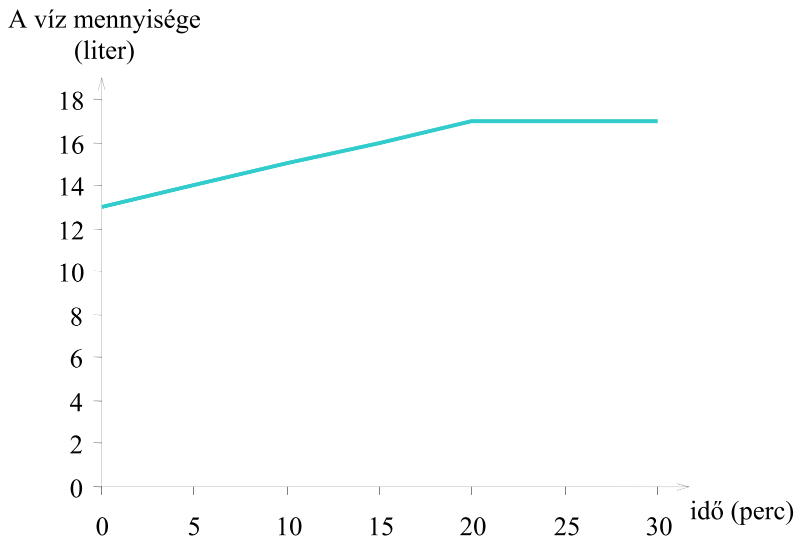
III. Függvények ábrázolása, vizsgálata

1. Függvények grafikonjának vizsgálata

A 4. feladatlap első két feladata grafikonok elemzése. A harmadik feladat grafikon készítés. Azok a tanulók, akik szorgalmasak voltak, a 3. feladat helyett elkészíthetik a saját gyertyájuk magasság-grafikonját, hiszen saját mérési eredmények állnak rendelkezésükre. (Csoporttársaikat is bevonhatják ennek a grafikonnak az elkészítésébe.) A többiek oldják meg a 3. feladatot! A tanulók csoportokban dolgozzanak! Ellenőrzés: egy-egy csoport elmondja a megoldásait, a többiek hozzászólnak. Ha készültek különböző grafikonok, nézzék meg egymás munkáját, észrevételeiket beszéljük meg!

4. FELADATLAP

1. Egy hordóba esővizet gyűjtünk öntözéshez. Egy tavaszi esős napon az alábbi grafikon szerint változott a hordóban lévő víz mennyisége. A megfigyelésünk fél órán keresztül tartott. Függvény-e az eltelt idő és a víz mennyisége közti kapcsolat?



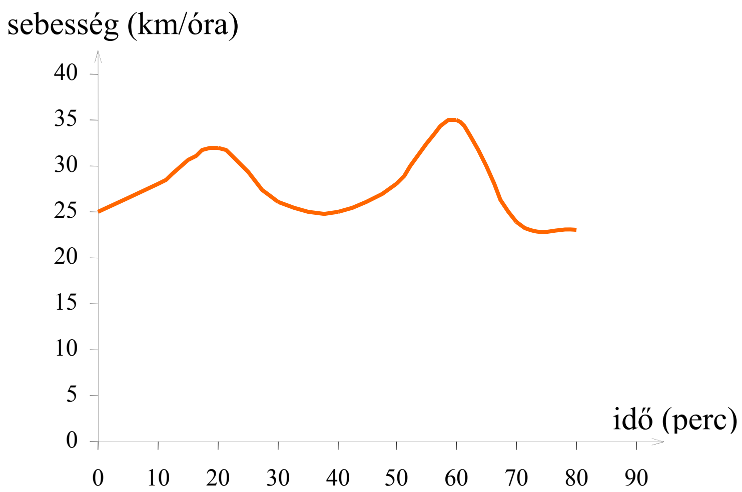
a) Készíts táblázatot a grafikon alapján!
b) Írd le, hogyan változott a hordóban lévő víz mennyisége!
c) Mennyi víz volt a hordóban a vihar elején?
d) Leolvasható-e a grafikonról, hogy mikor állt el az eső?
e) Hány literrel nőtt a hordóban lévő víz mennyisége?
f) 10 perc elteltével mennyi víz volt a hordóban? Hogyan lehet ezt leolvasni?
g) Mikor volt 16 liter a hordóban?

a)

eltelt idő (perc)	0	5	10	15	20	25	30
a víz mennyisége (liter)	13	14	15	16	17	17	17

b) Az első 20 percben egyenletesen növekedett, a következő 10 percben nem változott a víz mennyisége.
c) 13 liter
d) Igen, 20 perc múlva, amikor már nem nőtt a víz mennyisége a hordóban. De az is lehet, hogy megtelt a hordó, és, bár esik az eső, több víz nem fér bele.
e) 4 literrel nőtt a víz mennyisége.
f) 10 perc elteltével 15 liter víz volt a hordóban. Az idő tengelyre merőlegest állítok a 10. perc pontjába a grafikonig, a grafikon pontjából merőlegest állítva a víz mennyisége tengelyre leolvasom, hogy hány liter.
g) 15 perc múlva. A leolvasás technikája hasonló az előző pontbelihez.

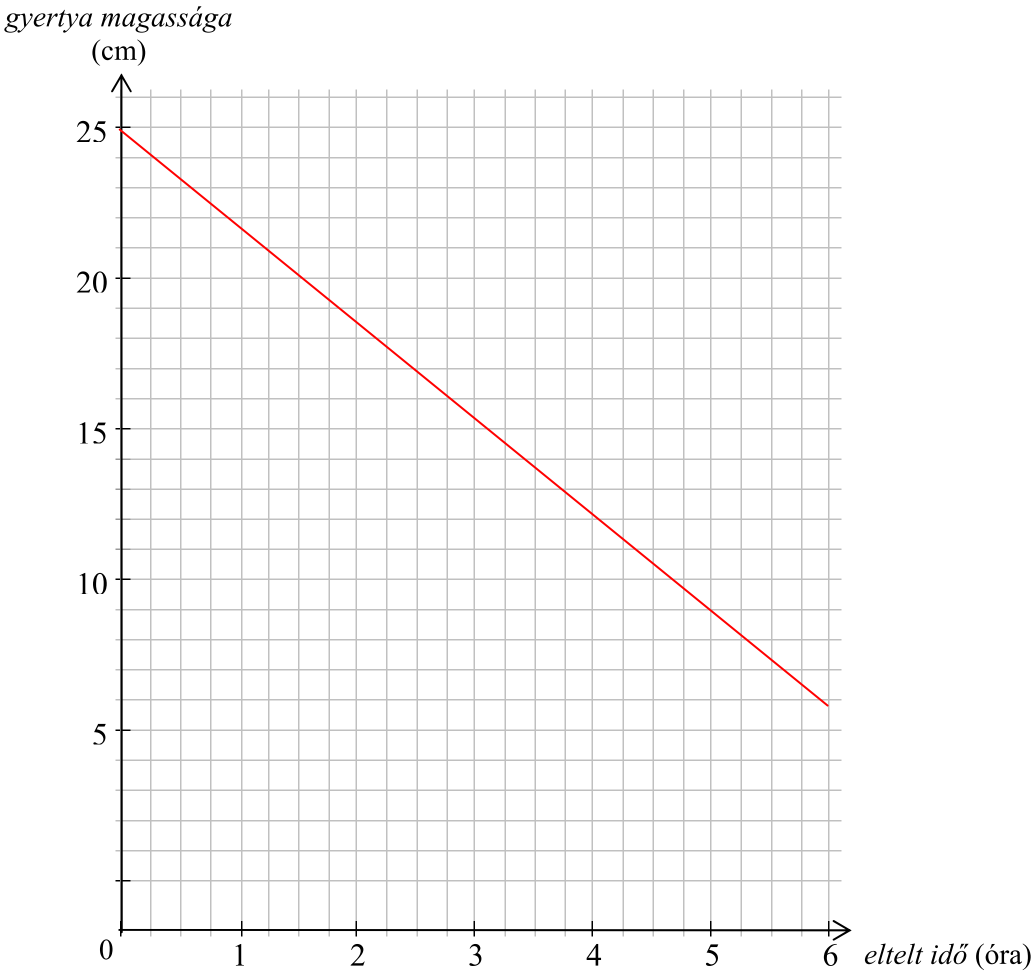
2. Emeséék biciklitúrán voltak az Őrségben. A grafikon a csoport sebességének változását mutatja az idő függvényében. Nézd meg figyelmesen az itt látható grafikont, és válaszolj az alábbi kérdésekre!



a) Körülbelül mikor volt a legnagyobb a csapat sebessége?
b) Mikor mentek a leglassabban?
c) Voltak-e olyan időpontok, amikor ugyanakkora sebességgel mentek? Írj rá példát!
d) Körülbelül mekkora sebességgel mentek a 30. percben?
e) Írd le, mely időszakokban növekedett a kerékpárosok sebessége?
f) Az út dimbes-dombos területen halad. Lehet-e következtetni a grafikonból arra, hogy mikor kerekeztek dombra fölfelé, és mikor gurultak lefelé?

a) A 60. perc körül.
b) A 75. perc körül.
c) Igen, pl a 0. percben és a 40. percben, vagy a 10. percben és az 50. percben.
d) Körülbelül 25 km/h sebességgel.
e) 0-20 perc között, és a 40-60 perc között.
f) Amikor a grafikon emelkedik, akkor a sebesség nő, tehát ekkor haladhatnak lefelé.

3. Meggyújtottunk egy 25 cm hosszú gyertyát. Egyenletesen égett, és azt tapasztaltuk, hogy 3 óra alatt a magassága 9 cm-t csökkent.
Ábrázoljátok a gyertya magasságát az eltelt idő függvényében!



2. Függvények ábrázolása koordinátarendszerben

Döntsük el, hogy tanulóinknak mi a megfelelő módszer, csoportmunka, és a végén megbeszélés, vagy a nagyobb segítséget adó, minden részfeladat utáni frontális ellenőrzés, megbeszélés.
A grafikonnak az elkészítéséhez nagy négyzethálós spirálfüzet szükséges (ma már a legtöbb gyerek ilyet használ), és a tengelyeken 2 négyzetrács legyen az egység.

Az 5. feladatlap 1. feladatában a néhány elemből álló alaphalmaztól fokozatosan jutunk a végtelen elemből álló (racionális számok) alaphalmazáig. Megbeszéljük, hogy van, amikor nem lehet minden számhoz kiszámítani a hozzárendelt értéket, hiszen végtelen sok szám van. A szabály alapján azonban bármelyik elemet meghatározhatjuk, táblázatot készítünk néhány egymáshoz rendelt értékről, majd ezek segítségével következtethetünk a függvény grafikonjára!

Jelen esetben az $y = x : 2$ **függvény grafikon**ját ábrázoljuk. Az elkészült ábrán felfedezhetik a tanulók, hogy ennek a grafikonnak a pontjai egy, az origón átmenő egyenesen vannak. Hivatkozhatunk az egyenes arányosság grafikonjára.

5. FELADATLAP

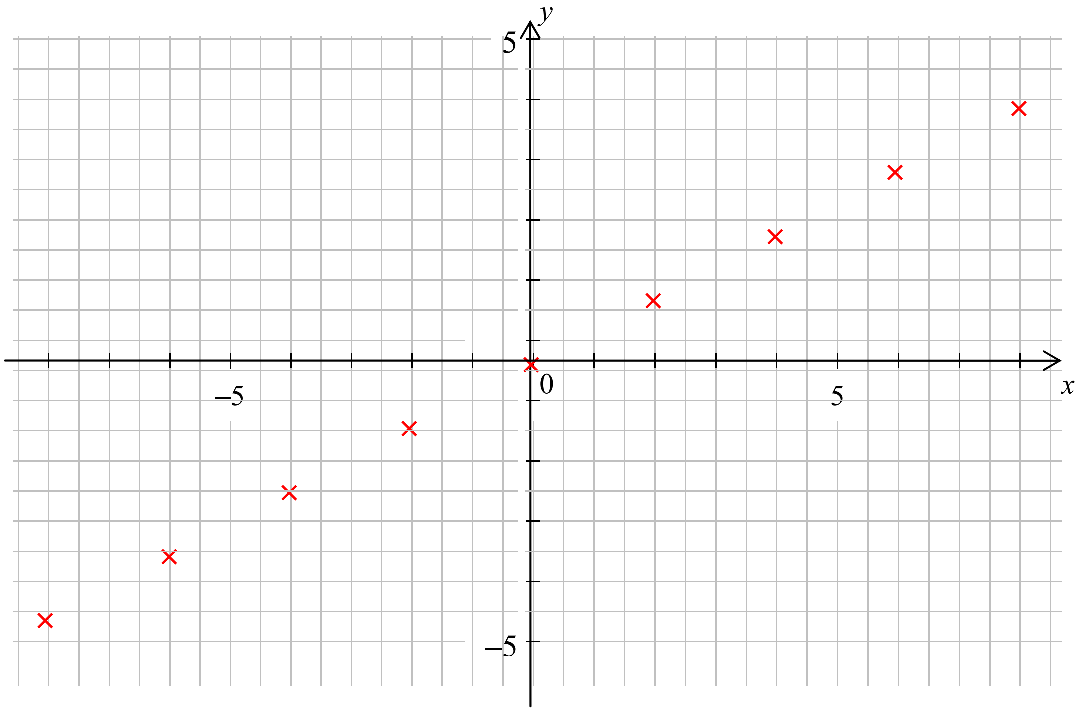
1. Ábrázold koordinátarendszerben a függvényt! A tengelyeken 2 négyzetrács legyen az egység. Hozzárendelési szabály: minden A-beli számhoz rendeljük hozzá a felét!

a) A = {a 10-nél kisebb abszolút értékű páros számok}

Készíts értéktáblázatot! Milyen függvényértékek szerepelnek a képhalmazban?

x	–8	–6	–4	–2	0	2	4	6	8								
$y = x : 2$	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4								

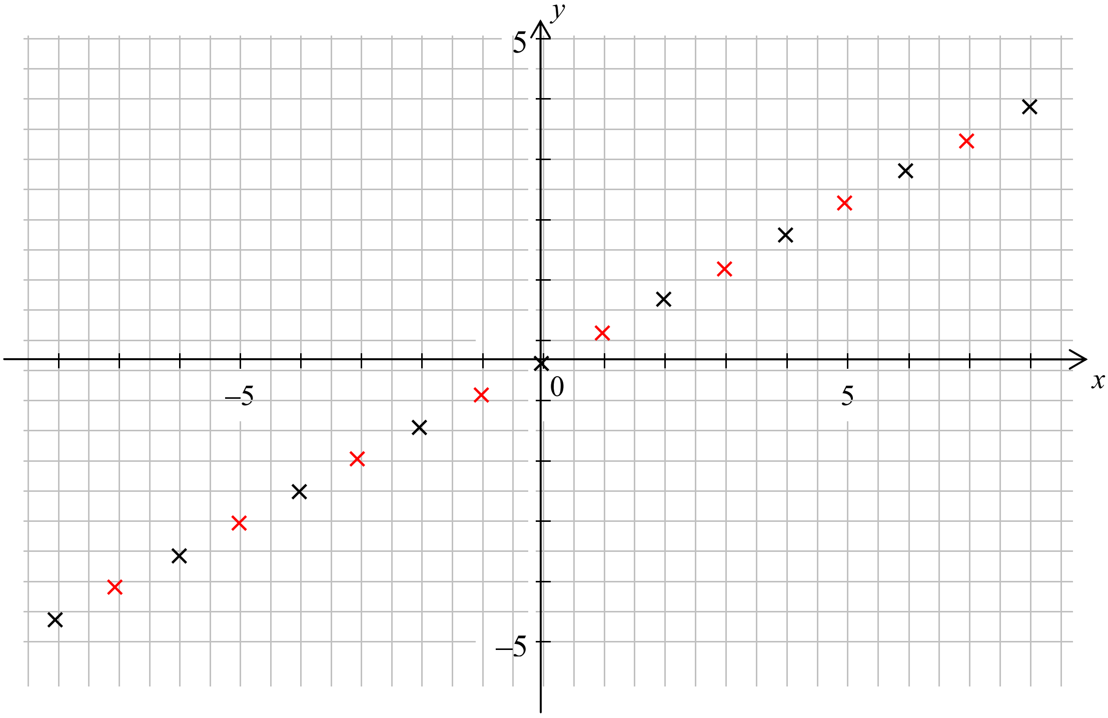
A képhalmazban az 5-nél kisebb abszolút értékű egész számok szerepelnek.



b) A hozzárendelési szabály ugyanaz, mint az **a)** feladatban, de más az alaphalmaz.
A = {a 10-nél kisebb abszolút értékű egész számok}
Egészítsd ki az előző értéktáblázatot az alaphalmaz új elemeivel! Milyen új függvényértékek kerültek a képhalmazba? Jelöld az előző grafikonon a most kapott pontokat!

x	–8	–6	–4	–2	0	2	4	6	8	–7	–5	–3	–1	1	3	5	7
$y = x : 2$	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	–3,5	–2,5	–1,5	–0,5	0,5	1,5	2,5	3,5

A képhalmazban törtszámok is szerepelnek.



c) Bővítsük tovább az alaphalmazt! A = {az egész számok}. Hány eleme van? Add meg a képhalmazt! Fel tudjuk-e sorolni az elemeit? Lehetnek-e a függvényértékek között a következő számok:

25,6; 100; –97; 42,5; –1206,5; –50,25; 1 255 130,5?

A képhalmaz a racionális számok halmaza. Az elemeit nem tudjuk felsorolni. A 25,6; –50,25 nem lehet a függvényértékek között, mert kétszeresük nem egész szám.

d) Legyen most az alaphalmaz a racionális számok halmaza, vagyis A = {a racionális számok}.

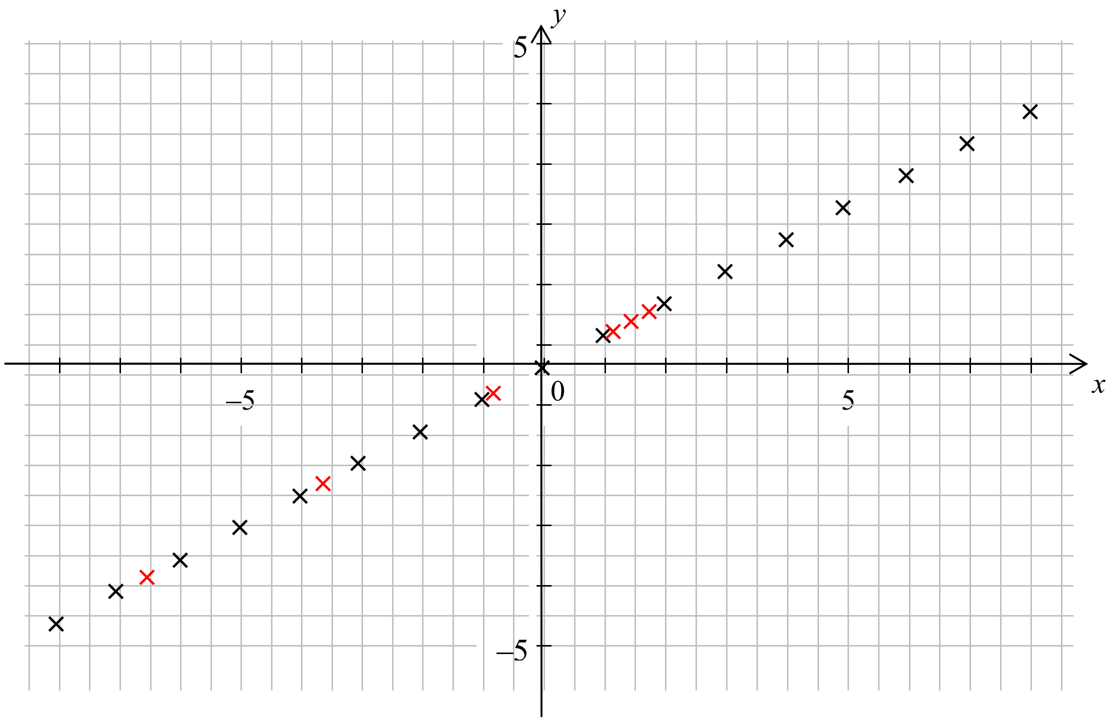
Add meg a képhalmazt! Egészítsd ki az alábbi értéktáblázatot! Lehetnek-e a függvényértékek között a következő számok:

25,6; 100; –97; 42,5; –1206,5; –50,25; 1 255 130,5?

A képhalmaz is a racionális számok halmaza. Mindegyik lehet a függvényértékek között, mert kétszeresük racionális szám.

Számíts ki minél több értékpárt, és ezeket is jelöld be a grafikonon!

x	–0,8	–6,5	–3,6	1,2	1,5	1,8						
$y = x : 2$	–0,4	–3,25	–1,8	0,6	0,75	0,9						



Azt is meg kell beszélnünk, hogy ha végtelen sok számpárt kiszámítanánk, vagyis minden x számhoz bejelölnénk a függvényértékét, akkor az $y = x : 2$ függvénynek a **grafikonja az origón áthaladó egyenes** lenne. Ha ismerik, megmondhatjuk, hogy az alaphalmaz, és a képhalmaz elemei valós számok is lehetnek.

A 2. feladatban önálló munkát kérünk. Mindenkinek két feladatot kell megoldania, majd a megoldást a párjával megbeszélnie. A párok ugyanazt a függvényt ábrázolják, egyikük az egész számok halmazán, másikuk a racionális számok halmazán. A feladat alkalmat ad annak megbeszélésére, hogy mikor kötjük össze az ábrázolt pontokat, és mikor nem.

2. Párokban dolgozzatok! A pár egyik tagja az A, másik a B feladatsorral dolgozzon! A megoldás után ellenőrizzétek egymás megoldásait, beszéljétek meg, hogy a két-két feladatot összehasonlítva milyen eltéréseket és milyen egyezéseket találtok!

A

a) A = {az egész számok}
Minden egész számhoz rendeljük hozzá a háromszorosánál 2-vel kisebb számot!
Mi lehet a képhalmaz? Függvény-e ez a hozzárendelés? Írd le a hozzárendelési szabályt képlet formájában is!
Képhalmaz: egész számok; egyértelmű hozzárendelés, tehát függvény; $y = 3x – 2$
Készíts értéktáblázatot legalább 7 értékpárral, és ábrázold grafikonon az összefüggést!
Diszkrét pontokból álló függvénygörbe: nem köthető össze egyenessel.

b) A = {racionális számok}
Minden számhoz rendeljük hozzá az abszolút értékét!
Mi lehet a képhalmaz? Függvény-e ez a hozzárendelés? Írd le a hozzárendelési szabályt képlet formájában is!
Képhalmaz: nem negatív számok; egyértelmű hozzárendelés, tehát függvény; $y = |x|$

Készíts értéktáblázatot legalább 7 értékpárral, és ábrázold grafikonon az összefüggést!
A racionális koordinátájú görbepontok – az irracionális koordinátájúak elhanyagolásával – összeköthetők egy „folytonos” egyenessel.

B

a) A = {racionális számok}
Minden egész számhoz rendeljük hozzá a háromszorosánál 2-vel kisebb számot!
Mi lehet a képhalmaz? Függvény-e ez a hozzárendelés? Írd le a hozzárendelési szabályt képlet formájában is!
Képhalmaz: racionális számok; egyértelmű hozzárendelés, tehát függvény; $y = 3x - 2$
Készíts értéktáblázatot legalább 7 értékpárral, és ábrázold grafikonon az összefüggést!
A racionális koordinátájú görbepontok – az irracionális koordinátájúak elhanyagolásával – összeköthetők egy „folytonos” egyenessel.

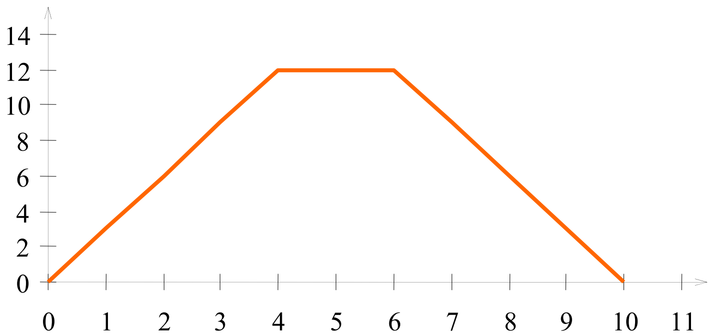
b) A = {az egész számok}
Minden számhoz rendeljük hozzá az abszolút értékét!
Mi lehet a képhalmaz? Függvény-e ez a hozzárendelés? Írd le a hozzárendelési szabályt képlet formájában is!
Képhalmaz: egész számok; egyértelmű hozzárendelés, tehát függvény; $y = |x|$
Készíts értéktáblázatot legalább 7 értékpárral, és ábrázold grafikonon az összefüggést!
Diszkrét pontokból álló függvénygörbe: nem köthető össze egyenessel.

Házi feladatnak adhatjuk a 6. feladatlapot, vagy válogathatunk a feladatgyűjtemény 10-14. feladatai közül.

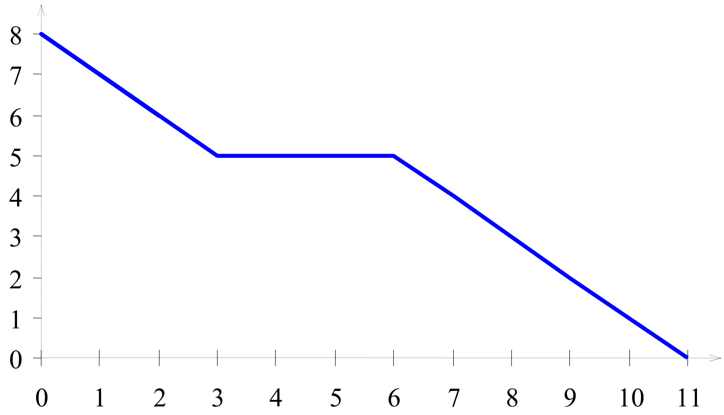
6. FELADATLAP

Az alábbi grafikonok közül melyiket melyik „történettel” tudjátok logikai kapcsolatba hozni? Döntéseiteket indokoljátok! Írjátok fel, melyik tengelyen milyen változást jelöltünk!

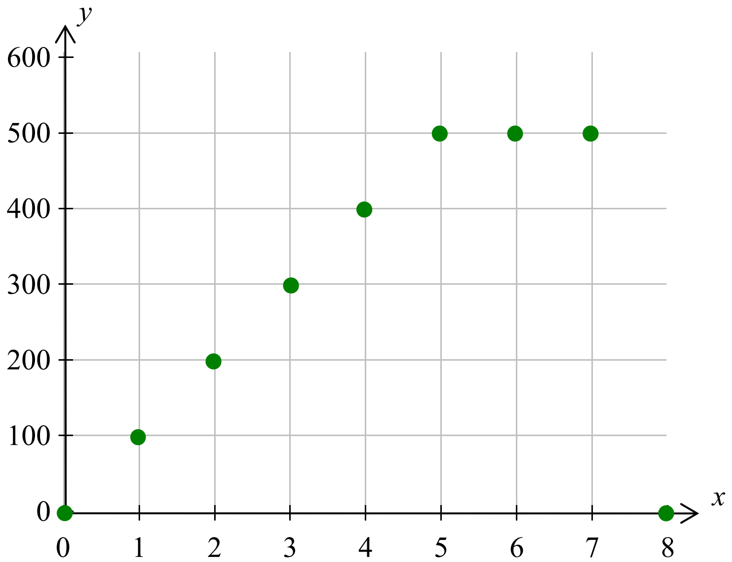
I.



II.



III.



a) Luca barátaival kirándulni ment. 4 óra alatt értek el egy gyönyörű tisztásra. Ott megpihentek, játszottak, majd két óra elteltével hazamentek. A kirándulás során végig egyenletes 3 km/h sebességgel haladtak.

b) Gergő öt napon keresztül napi 100 Ft-ot tett félre zsebpénzéből. Két napig nem tudott félretenni, és a következő napon elköltötte összes félretett pénzét.

c) Egy 8 literes kannából másodpercenként 1 liter vizet csurgattunk ki a virágokra. A 3. másodpercben 3 másodpercig megálltunk, majd tovább folytattuk a locsolást, amíg kicsurgattuk az összes vizet.

a) → I **b)** → III **c)** → II

IV. Lineáris függvények meredekségének vizsgálata

1. Az egyenes arányosság grafikonja

A 7. feladatlap 1. a), b), c), d) feladatait osszák el a csoport tanulói egymás között! Mindenki egy feladatot oldjon meg, majd hasonlítsák össze a feladatokat és a megoldásokat! Tapasztalataikat vitassák meg!
Lassabban haladó osztályban csak két feladatot adjunk, pl. az a), b)-t hogy páronként 1-1 feladatot oldjanak meg, majd a párok beszélik meg egymással a 2 feladatban tapasztaltakat.

Az észrevételeket az osztállyal is megbeszéljük:
– mind a négy grafikon pontjai az **origón áthaladó egyenes**en vannak;
– mind a négy képlet $\boldsymbol{y = a \cdot x}$ formában írható fel;
– a feladatokban szereplő mennyiségek között **egyenes arányosság** van, vagyis az összetartozó értékpárok **hányadosa egyenlő.** (Azt is észrevehetik, hogy nagyobb hányados esetén meredekebb az egyenes, de erről majd később beszélgetünk.)
– ha nemcsak ezeket az értékpárokat ábrázolnánk, hanem pl. a függönyanyag árát akár cm-enként, a megtett utat akár másodpercenként, akkor az egyenesünk egyre jobban kirajzolódna: a 2. feladatban ugyanezeket a függvényeket adtuk meg a racionális számok halmazán értelmezve. Berajzoltathatjuk az egyeneseket a megfelelő koordinátarendszerekbe.

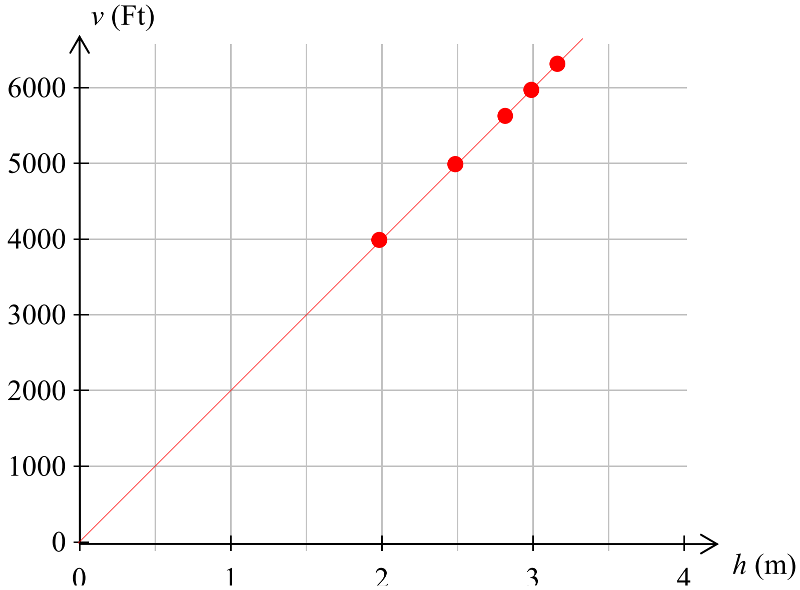
7. FELADATLAP

1. Négy fős csoportban oldjátok meg a feladatot! Osszátok el, hogy ki dolgozzon az a), a b), a c) illetve a d) ponttal! Ha mindenki elkészült a saját munkájával, beszéljétek meg, hogy miben egyeznek meg, miben különböznek a megoldásaitok!

a) 1 m függönyanyag 2000 forintba kerül. Mennyit fizetünk, ha 2 m-t; 2,5 m-t; 2,8 m-t; 3 m-t; 3,2 m-t vásárolunk? Írd le képlettel, hogyan kell kiszámítani a vételárat! Készíts értéktáblázatot, és ábrázold grafikonon, hogyan függ a vételár (v) a vásárolt anyaghossztól (h)! (Az y-tengelyen szerepeljen a vételár: 1 cm jelentsen 1000 forintot!)

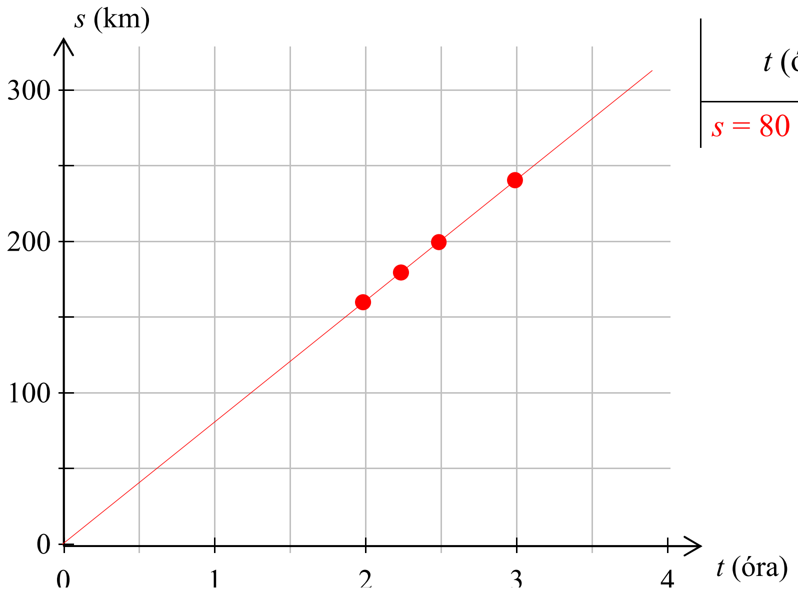
$v = 2000 \cdot h$

h (m)	2	2,5	2,8	3	3,2
$v = 2000 \cdot h$ (Ft)	4000	5000	5600	6000	6400



b) Egy gépkocsi óránként átlag 80 km utat tesz meg. Mekkora utat tesz meg fél óra; 2 óra; $2\frac{1}{4}$ óra; 2,5 óra; 3 óra alatt? Írd le képlettel, hogyan kell kiszámítani a megtett utat! Készíts értéktáblázatot, és ábrázold grafikonon, hogyan függ a megtett út (s) az időtől (t)!

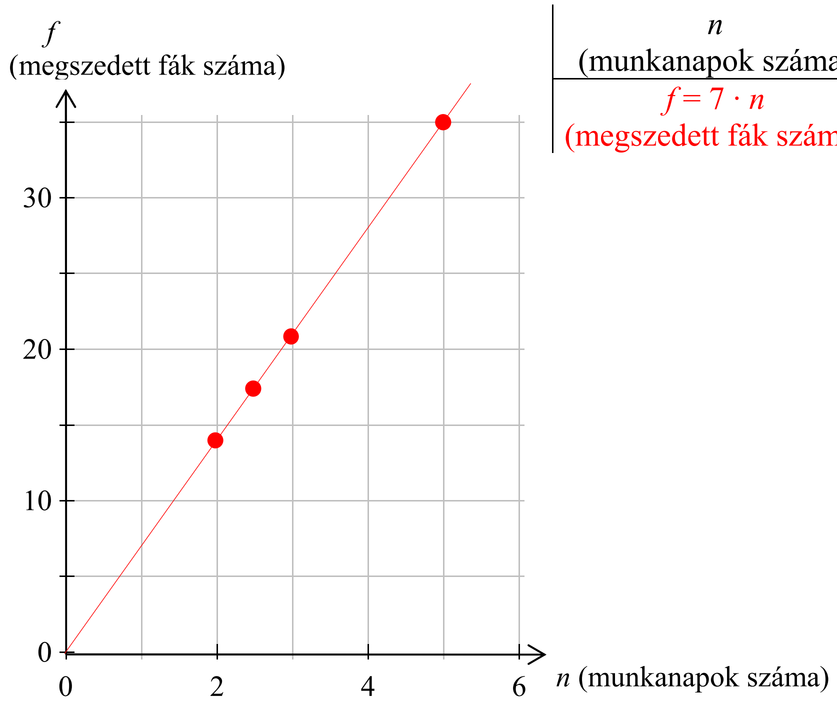
$s = 80 \cdot t$



t (óra)	2	$2\frac{1}{4}$	2,5	3
$s = 80 \cdot t$ (km)	160	180	200	240

c) A gazda naponta 7 szilvafa gyümölcsét szedi le, hogy a piacra vigye. Hány szilvafát szed meg fél nap; 2 nap; 2,5 nap; 3 nap; 5 nap alatt? Írd le képlettel, hogyan kell kiszámítani az elvégzett munkát! Készíts értéktáblázatot, és ábrázold grafikonon, hogyan függ a megszedett fák száma (f) a munkanapok számától (n)!

$f = 7 \cdot n$

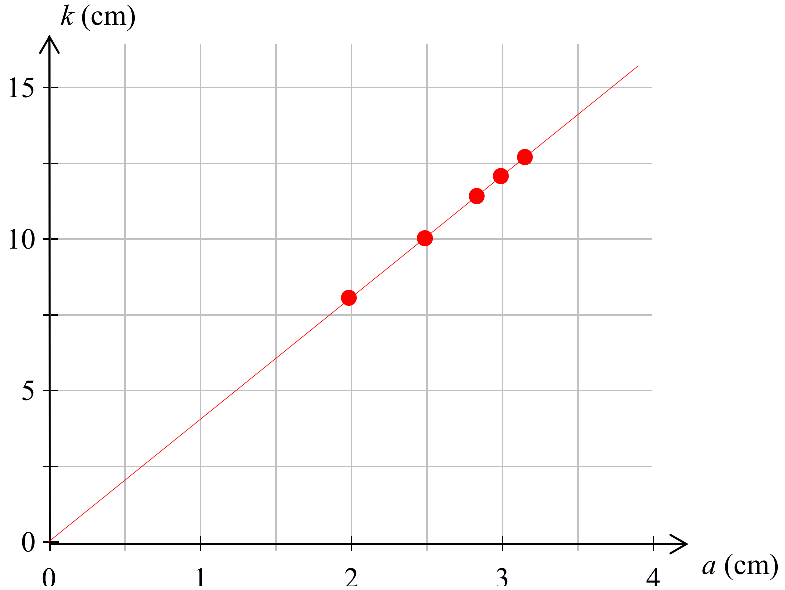


n (munkanapok száma)	2	2,5	3	5
$f = 7 \cdot n$ (megszedett fák száma)	14	17,5	21	35

d) Mekkora a négyzet kerülete, ha oldala: 2 cm; 2,5 cm; 2,8 cm; 3 cm; 3,2 cm? Írd le képlettel, hogyan kell kiszámítani a négyzet kerületét! Készíts értéktáblázatot, és ábrázold grafikonon, hogyan függ a négyzet kerülete az oldal hosszától!

$k = 4 \cdot a$

a (cm)	2	2,5	2,8	3	3,2
$k = 4 \cdot a$ (cm)	8	10	11,2	12	12,8



2. Ábrázold a következő összefüggésekkel megadott függvényeket! Az alaphalmaz és a képhalmaz a racionális számok halmaza. A grafikont megrajzolhatod más színnel az előző feladat megfelelő koordinátarendszerében.

a) $v = 2000 \cdot h$

b) $s = 80 \cdot t$

c) $f = 7 \cdot n$

d) $k = 4 \cdot a$

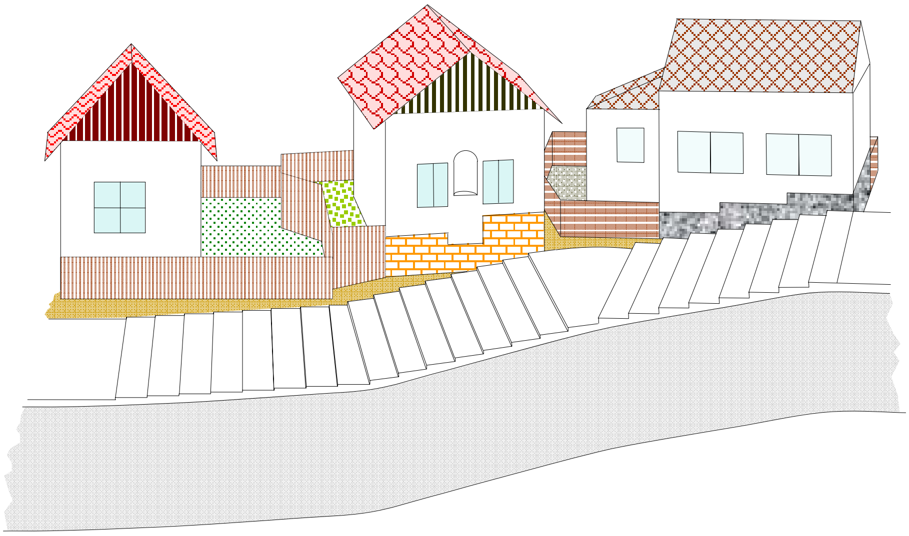
TUDNIVALÓ:

Az egyenes arányosság grafikonja az origón átmenő egyenes.

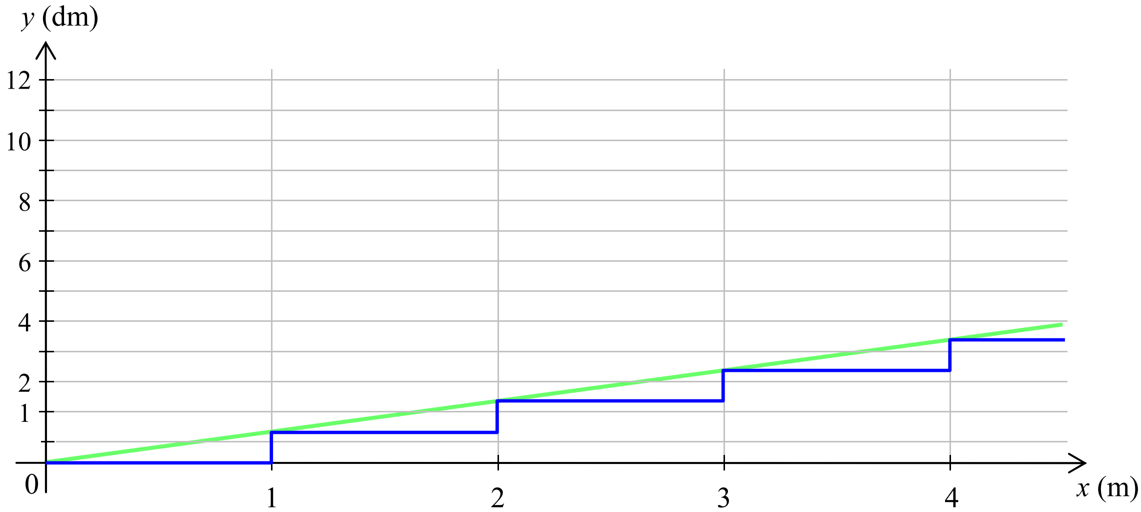
2. A függvény meredeksége

A meredekség fogalmát alakítja a 3. feladat. Frontális feladatmegoldást javasolunk, az ábrázolás közben megbeszélve, hogy a meredekség megmutatja, hogy 1 lépcső (egység) alatt mekkora az emelkedés. A gyalogos lépcsős emelkedése a grafikonon jól összevethető a kerékpáros folyamatos emelkedésével. A kettő együtt jól szemlélteti a lineáris függvény meredekségét.

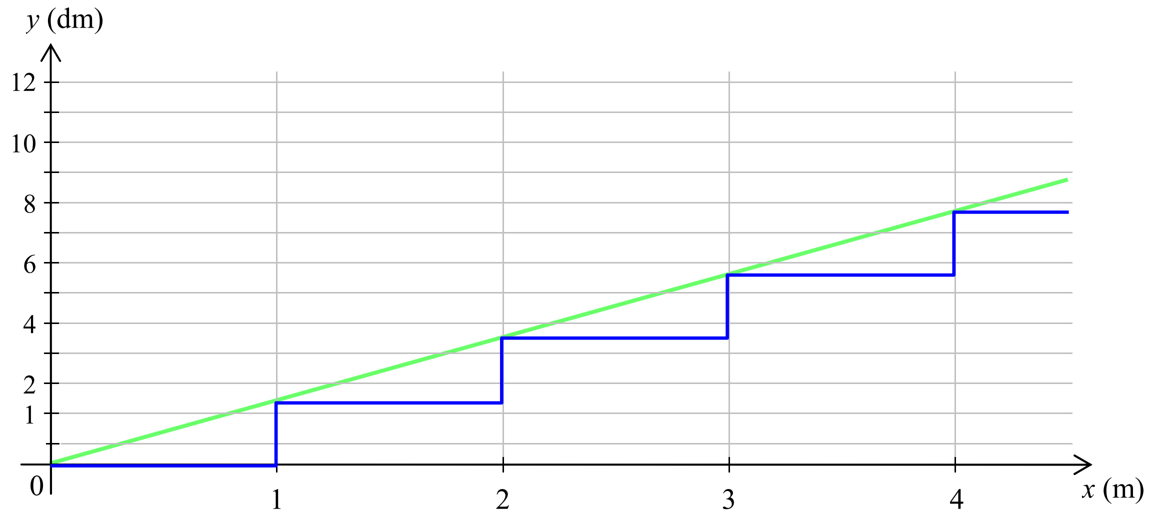
3. Kerekecske falucska hegyoldalban épült. A Lejtő utcán a gyalogjárdán lépcsőkön lehet felmenni az utca végéig.



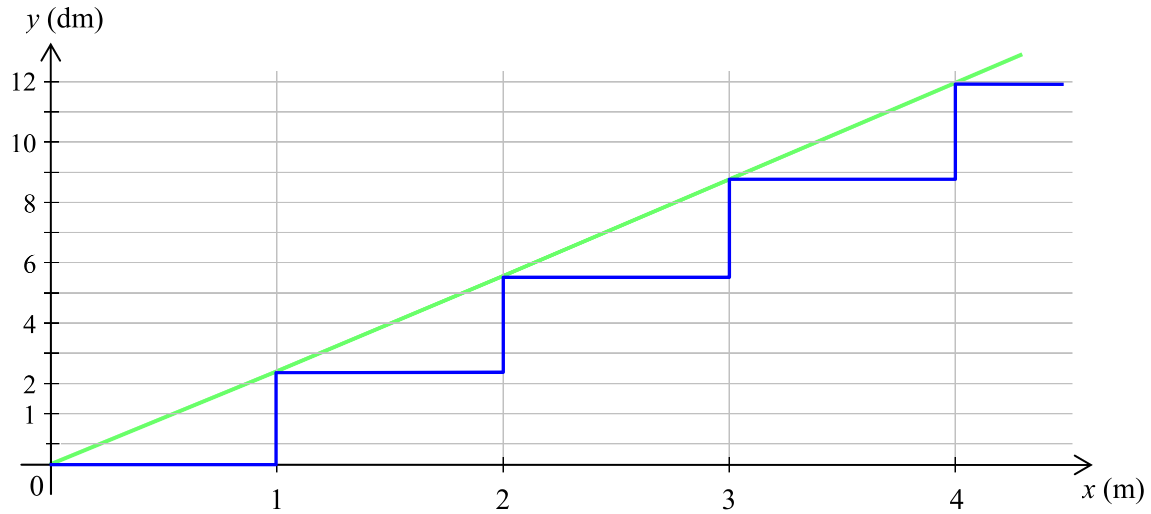
a) Kezdetben a lépcsők 1 m szélesek és 1 dm magasak. Panni néni gyalogosan, Pali unokája mellette az úttesten kerékpáron halad fölfelé.
Ábrázoljuk mindkettőjük emelkedését grafikonon úgy, hogy:
az x-tengelyen a lépcsők számát, az y-tengelyen az emelkedést ábrázoljuk. (Elegendő 4-5 lépcső ábrázolása az emelkedés megfigyeléséhez.)



b) A közepétől meredekebb a Lejtő utca, itt az 1 m széles lépcsők 2 dm magasak. Ábrázoljuk ezt is grafikonon!



c) Az utca végén Panni néninek össze kell szednie az erejét, hiszen ezen a szakaszon 1 m-enként 3 dm magasak a lépcsők, de Palinak sem könnyű ezen a kaptatón tolni a kerékpárt. Ábrázoljuk ezt az emelkedést is, majd figyeljük meg a három grafikon meredekségét! Hogyan számítjuk ki a szintkülönbséget az a), a b) és a c) feladatban? Írjuk fel mindhárom függvény képletét!



$y = 1 \cdot x$; $y = 2 \cdot x$; $y = 3 \cdot x$;

A c) feladat grafikonja a legmeredekebb, és képletében az x előtt álló szorzószám a legnagyobb.

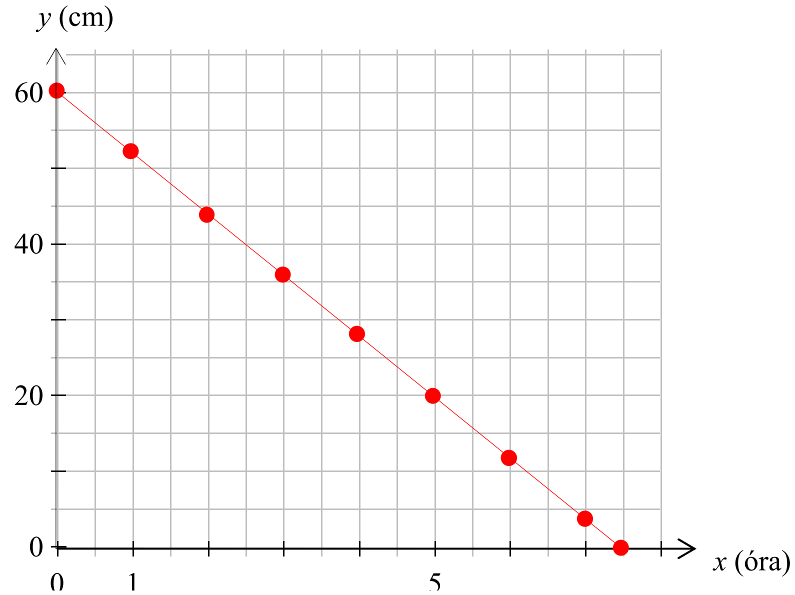
Most már visszatérhetünk az 1. (és 2.) feladat egyenesarányosság-grafikonjaihoz, figyeljük meg, hogy az **összetartozó értékpárok hányadosa éppen a függvény meredekségével egyenlő.**

Ezután ismerkedjünk meg egy olyan folyamattal, amelyet képlettel leírva azt tapasztaljuk, hogy az x együtthatója negatív szám. Dolgozzanak, vitázzanak tanulóink csoportban, de tapasztalataikat, megállapításaikat beszéljük meg frontálisan is!

4. Egy medencében 60 cm magasan áll a víz, amikor megnyitják a lefolyót. Ennek következtében óránként 8 cm-rel csökken a vízszint. Mit gondolsz, ennek a függvénynek is egyenes lesz a grafikonja?

Készíts értéktáblázatot, és ábrázold a vízszintcsökkenést az idő függvényében! Az x-tengelyen 2 rács 1 óra, az y-tengelyen 2 rács 10 cm legyen!
Mit állapíthatsz meg ennek a függvénynek a meredekségéről? Írd le képlettel a függvényt!
Ez a grafikon nem emelkedik, hanem csökken: $y = 60 - 8x$, vagyis $y = -8x + 60$.

x (óra)	0	1	2	3	4	5	6	7	7,5
$y = 60 - 8 \cdot x$ (cm)	60	52	44	36	28	20	12	4	0



3. Gyakorlás

A 5., 6. feladat gyakorlásra szolgál, de tapasztalatot ad a függvények meredekségéről is: hogy ugyanazon x értékhez más függvény más értéket rendel, és ez a közös koordinátarendszerben ábrázolva a grafikonokon is jól megfigyelhető. $\frac{y}{x}$ ~ meredekség ~ x szorzótényezője.
Önállóan vagy csoportban oldják meg, az ellenőrzés, megbeszélés osztályszinten történjen!

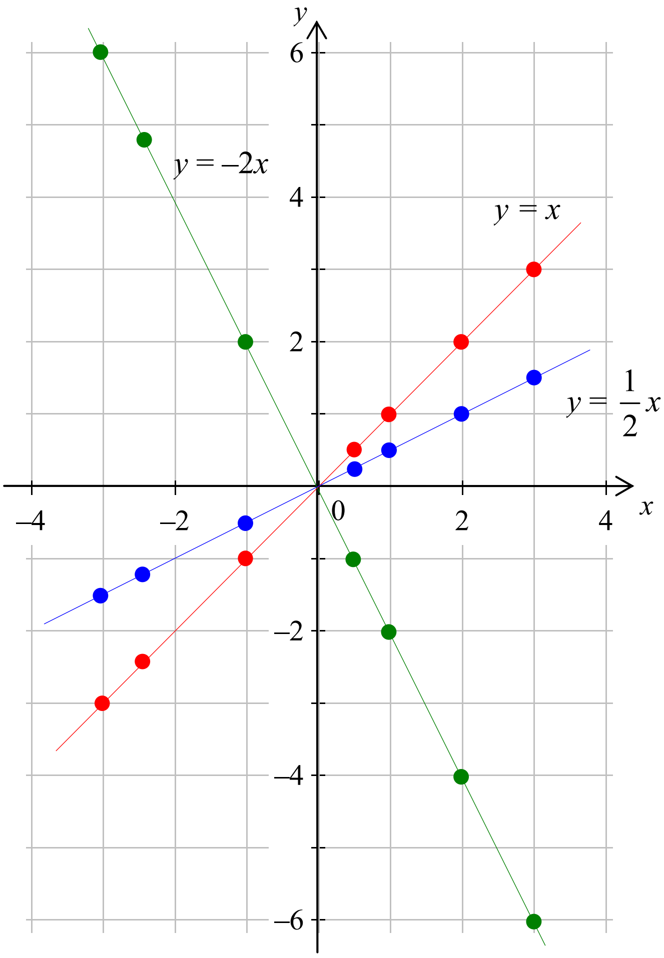
5. Töltsd ki az értéktáblázatot, amelynek első sorába beírtunk néhány alaphalmaz-beli elemet, a második, harmadik és negyedik sorba pedig az itt felsorolt három függvény értékeit kell beírnod. Az alaphalmaz és a képhalmaz legyen a racionális számok halmaza!

a) Minden számhoz hozzárendeljük önmagát.
b) Minden számhoz rendeljük hozzá a –2-szeresét!
c) Minden számhoz rendeljük hozzá a felét!

Számítsd ki mindegyik feladatban az összetartozó értékpárok hányadosát!

x	–3	–2,4	–1	$\frac{1}{2}$	1	2	3	$\frac{y}{x}$
$y = x$	–3	–2,4	–1	$\frac{1}{2}$	1	2	3	1
$y = -2x$	6	4,8	2	–1	–2	–4	–6	–2
$y = \frac{1}{2}x$	–1,5	–1,2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	1,5	$\frac{1}{2}$

Milyen összefüggés van az egymáshoz rendelt mennyiségek között? Egyenes arányosság.
Ábrázold a megadott függvényeket ugyanabban a koordinátarendszerben! (Használj különböző színű ceruzát a különböző grafikonokhoz!)
Figyeld meg mindegyik függvény esetében, hogy ha az x-tengelyen 1 egységet pozitív irányba lépünk, akkor ez mekkora emelkedést jelent y irányban! Mennyi a függvények meredeksége?

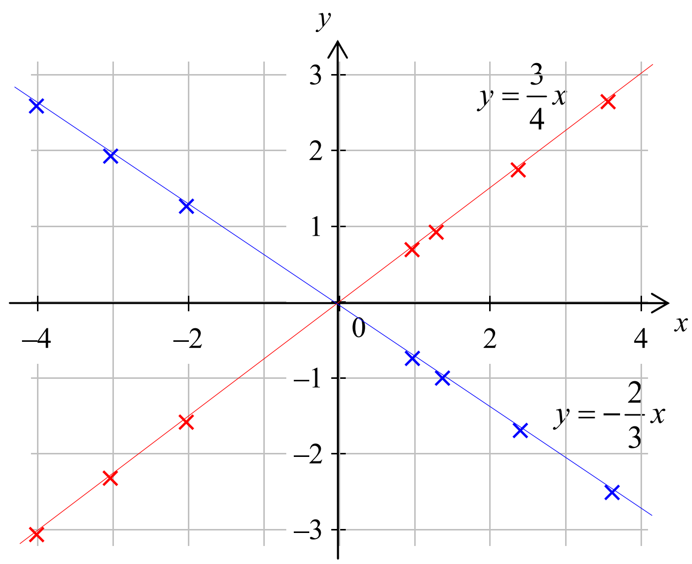


6. Készíts értéktáblázatot a megadott függvényekhez, és ábrázold őket: az alaphalmaz és a képhalmaz a racionális számok halmaza! Figyeld meg mindegyik függvénynél, hogy 1 egység x-irányú lépés mekkora emelkedést jelent y irányban! Mennyi a függvények meredeksége?

a) $y = \frac{3}{4}x$ **b)** $y = -\frac{2}{3}x$

A függvények meredeksége:

a): $\frac{3}{4}$; **b)**: $-\frac{2}{3}$.



V. A lineáris függvény fogalma, ábrázolása

1. Bemelegítő függvényábrázolások

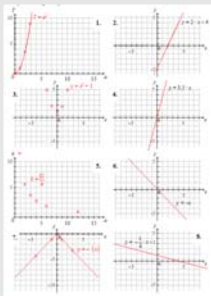
A nyolcadik feladatlap megoldatásával az a célunk, hogy tanulóink egyszerű esetekben ismerjék fel azokat a hozzárendelési szabályokat, amelyek grafikonja egyenes. Ezután fogalmazzuk meg a lineáris függvényekkel kapcsolatos ismereteket.
A tanulók négyes csoportokban dolgoznak, mindenkinek két függvényt kell ábrázolnia, ezek közül az egyik lineáris. Ha elkészültek saját munkájukkal, megnézik egymás feladatait a megoldással együtt, majd a nyolc függvény vizsgálata alapján közösen válaszolnak a feltett kérdésekre.
Ezután következzék osztályszinten a tudnivalók összefoglalása!
Kiadhatjuk a feladatokat differenciáltan, személyre szabottan is, ekkor azonban a csoportban történő függvényelemzés elmarad, a frontális megbeszéléssel pótolható.

8. FELADATLAP

Négy fős csoportban oldjátok meg a feladatokat! Osszátok el, hogy ki dolgozzon az a), a b), a c) illetve a d) ponttal!
Minden feladatban készítsetek értéktáblázatot, majd ábrázoljátok a függvényeket! Ha mást nem adunk, az alaphalmaz és a képhalmaz minden esetben a racionális számok halmaza.

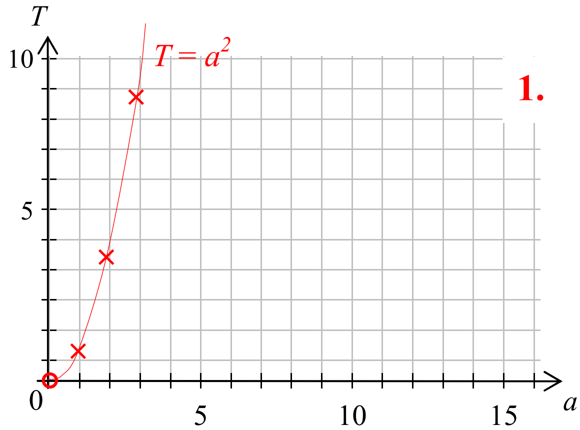
Ha mindenki elkészült a saját munkájával, nézzétek meg egymás feladatait, ellenőrizzétek a megoldásokat, majd válaszoljatok a feltett kérdésekre!

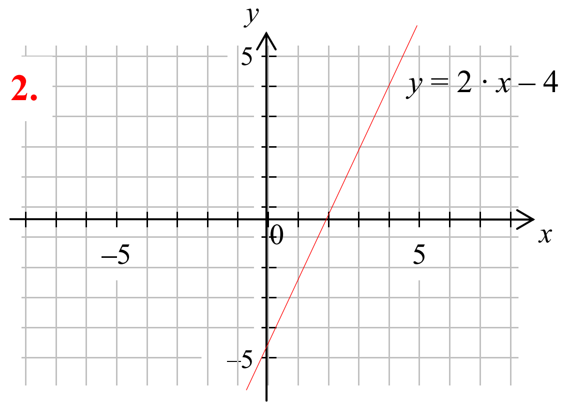
Frontális ellenőrzés a **3. tanári melléklet**-tel – lásd a modul eszközei közt!



a) **1.** Az alaphalmaz és a képhalmaz a pozitív számok halmaza. Hogyan függ a négyzet területe oldalának a hosszúságától? Írd le a függvény képletét is! A terület mérőszáma az oldal mérőszámának négyzete, $T = a^2$.

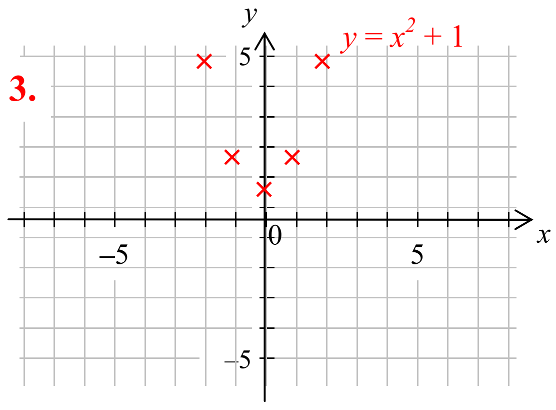
2. $y = 2 \cdot x - 4$

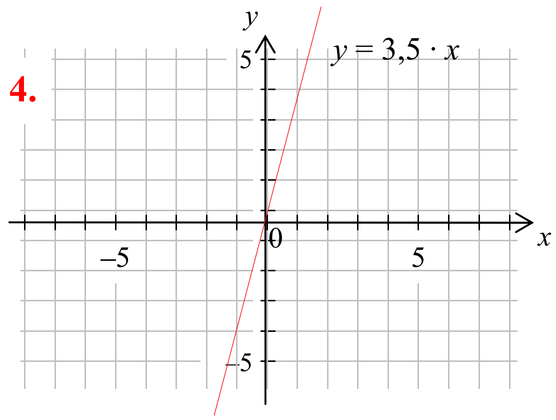




b) **3.** Minden egész számhoz rendeljük a négyzeténél 1-gyel nagyobb számot! Írd le a függvény képletét is! $y = x^2 + 1$

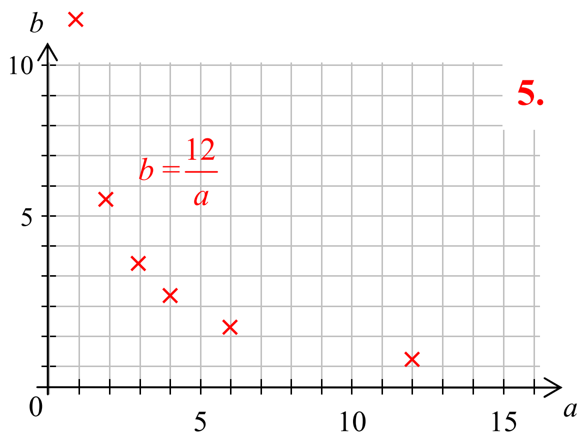
4. $y = 3{,}5 \cdot x$

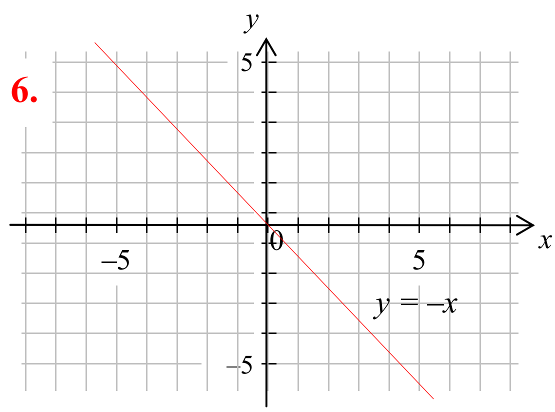




c) **5.** Egy téglalap területe 12 cm², hogyan függ b oldalának hossza az a oldal változásától? Legyen az alaphalmaz: {1; 2; 3; 4; 6; 12}! Írd le a függvény képletét is! Azonos terület esetén a és b oldal fordítottan arányos. $b = \dfrac{12}{a}$

6. $y = -x$

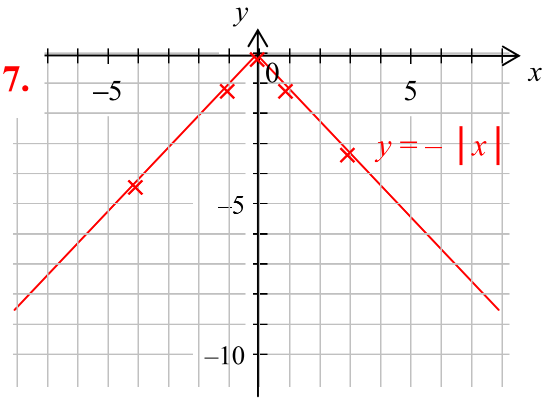




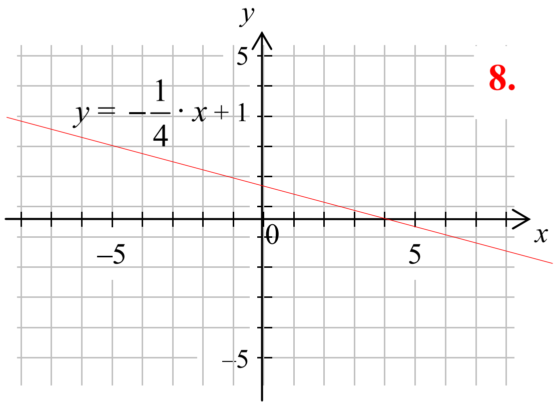
d) **7.** Rendeljük minden számhoz az abszolút értékének az ellentettjét! Írd le a függvény képletét is! $y = -\left|x\right|$

8. $y = -\frac{1}{4} \cdot x + 1$

7.



8.



Figyeld meg az ábrázolt nyolc függvényt! Melyek grafikonja egyenes? Írd le ezek képletét!

Van-e a megadott függvények között olyan, amely egyenes arányosságot fejez ki? Írd le ezek képletét! Mekkora ezeknek a függvényeknek a meredeksége? Hogyan állapítható meg a képletből a meredekség?
Egyenes: a 2., 4., 6., 8. számú feladatok függvényei.

A képletek: $y = 2 \cdot x - 4$; $y = 3{,}5 \cdot x$; $y = -x$; $y = -\frac{1}{4} \cdot x + 1$

Egyenes arányosság: $y = 3{,}5 \cdot x$; $y = -x$;
Meredekség: az x előtt álló szorzószámmal egyenlő. (Az $y = -x$ függvény meredeksége –1.)

2. A lineáris függvény fogalma

A megbeszélés során elmondjuk, hogy az olyan függvényt, amelynek grafikonja egyenes, **lineáris függvény**nek nevezzük.

Megfigyeljük a képleteket, és megállapítjuk, hogy:
– az **x mindegyikben az első hatványon** szerepel, ezért elsőfokú függvénynek nevezzük;
– a képletben az x-et megszorozzuk valamilyen állandó számmal. Ez a szám az egyenes **meredeksége**, amely megmutatja, hogy az x-tengely pozitív irányába egy egységet haladva mennyivel nő illetve csökken a függvény értéke. Ha ez a szorzószám pozitív, akkor nő, ha negatív, akkor csökken a függvényérték.

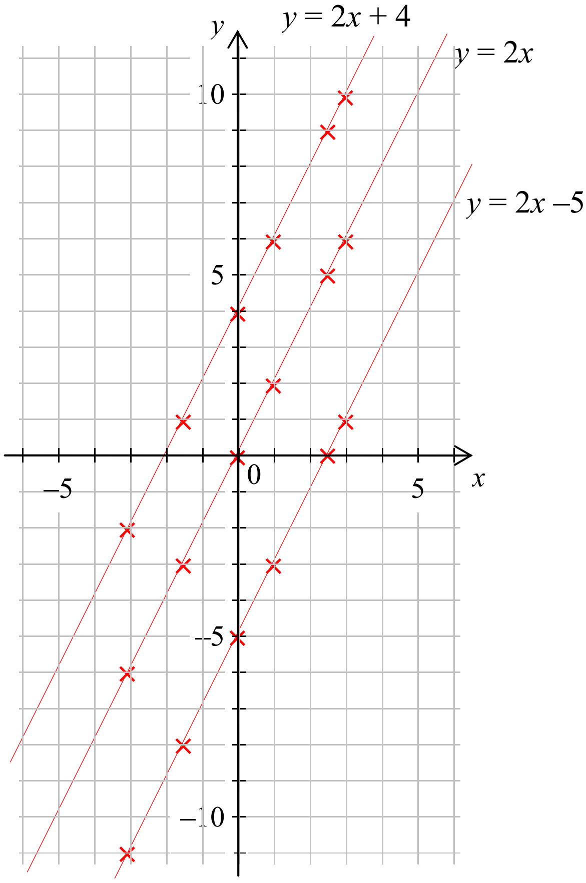
Az $y = a \cdot x + b$ képletről és a b szerepéről a 9. feladatlap megoldása során szerzett tapasztalatok alapján beszélgetünk.
Párosával dolgozzanak a tanulók! A pár egyik tagja az a), másik tagja a b) feladatot oldja meg! A b) kicsit nehezebb, lehet differenciálni. Nézzék meg egymás megoldásait, vita esetén először a csoport másik párjához, további tanácstalanság esetén a tanárhoz forduljanak. A tapasztalatok megbeszélése már a négyes csoportban történhet.

9. FELADATLAP

1. Töltsd ki az értéktáblázatot, amelynek első sorába beírtunk néhány alaphalmaz-beli elemet, a második, harmadik és negyedik sorba pedig az itt felsorolt három függvény értékeit kell beírnod. Az alaphalmaz és a képhalmaz legyen a racionális számok halmaza!
Ábrázold közös koordinátarendszerben a három függvényt!

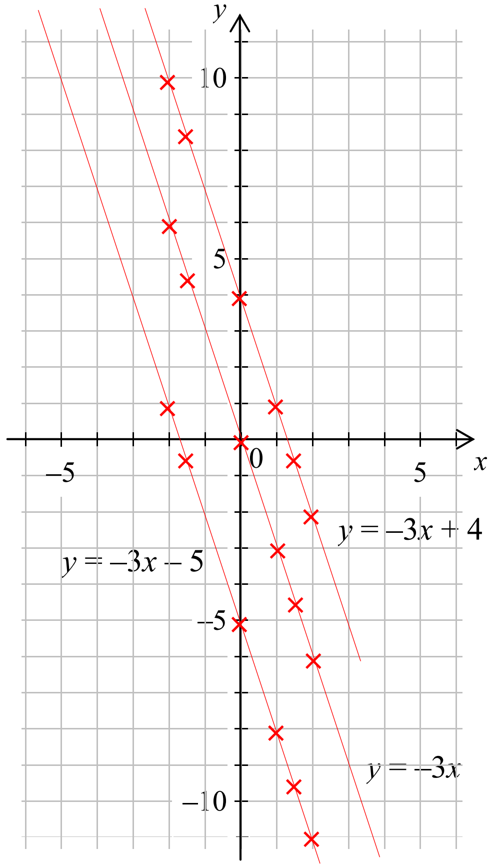
a) $y = 2x$ $y = 2x + 4$ $y = 2x - 5$

x	–3	–1,5	0	1	2,5	3
$y = 2x$	–6	–3	0	2	5	6
$y = 2x + 4$	–2	1	4	6	9	10
$y = 2x - 5$	–11	–8	–5	–3	0	1



b) $y = -3x$ $y = -3x + 4$ $y = -3x - 5$

x	–2	–1,5	0	1	1,5	2
$y = –3x$	6	4,5	0	–3	–4,5	–6
$y = –3x + 4$	10	8,5	4	1	–0,5	–2
$y = –3x – 5$	1	–0,5	–5	–8	–9,5	–11



A feladatok megoldása és a csoportmegbeszélések után az osztállyal foglaljuk össze a mai órán szerzett tapasztalatokat!
– Legfeltűnőbb, hogy párhuzamosak az a), illetőleg b) feladatban ábrázolt egyenesek, mert azonos a meredekségük (2, illetőleg –3).
– Az értéktáblázat első sora egyenes arányosság, ezt már ismerjük.
– A második sorban minden eddigi függvényértékhez 4-et kell hozzáadni a megadott szabály (képlet) szerint, tehát, mivel az egyenes arányosság függvényének grafikonja az origón halad át, ez a függvény 4-gyel „magasabban”, +4-nél metszi az y-tengelyt.
– A harmadik sor értékei rendre 5-tel kisebbek, az egyenes –5-nél metszi az y-tengelyt.

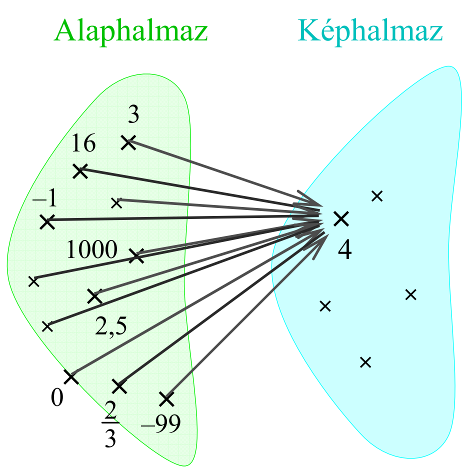
Hívjuk fel a figyelmüket arra, hogy a függvény egyenese $x = 0$-nál (amit bármilyen számmal megszorozva 0-t kapunk) metszi az y-tengelyt: tehát a metszéspont y értéke – a függvény $x = 0$-hoz rendelt értéke – éppen a képletben szereplő hozzáadott szám.
Most már felírhatjuk az elsőfokú függvény általános szabályát, képletét is: $y = a \cdot x + b$.
Bizonyára felismerik, hogy „a” az a szorzószám, amely a függvény meredekségét jelöli, „b” értéke pedig megmutatja, hogy a grafikon hol metszi az y-tengelyt.

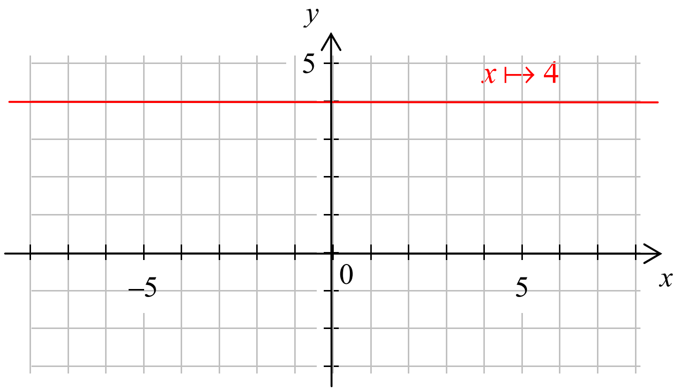
Mutassuk meg az $y = f(x)$ függvényjelölést is. Az y függvényérték attól függ, hogy milyen számokat írunk x helyébe: ezt a függést szokták $f(x)$-szel jelölni. Pl. az $y = 2x$ helyett írhatjuk azt is, hogy $f(x) = 2x$; vagy $y = 2x + 4$ helyett hogy $g(x) = 2x + 4$. Itt a g szintén függvénykapcsolatot jelöl, csak az f-étől különböző szabályra utal. Ez a jelölésmód lehetővé teszi, hogy a különböző függvényeket a megadásukkor is megkülönböztessünk.

3. Konstans függvény

A 2. feladatban megismerkednek a gyerekek a konstans függvénnyel, így lesz teljes a lineáris függvény fogalma. Csoportban dolgozhatnak a szokásos módon, majd az ellenőrzéssel frontálisan megbeszéljük a tudnivalókat. Írjuk fel a függvény képletét is: $y = 4$, azt is megmutathatjuk, hogy ez tulajdonképpen az $y = 0 \cdot x + 4$ függvény.
Házi feladat lehet a 3. feladat, vagy válogathatunk még a feladatgyűjtemény 15-18., esetleg a nehezebb 21-23. feladatai közül.

2. Ábrázold a halmazábrával megadott hozzárendelést koordinátarendszerben!
Minden racionális számhoz a képhalmaz egyazon elemét rendeljük. Függvény-e ez a hozzárendelés? Igen.





ÖSSZEGZÉS:

Lineáris függvények

– **Elsőfokú függvény:** olyan függvény, amelyben az x az első hatványon szerepel, például $y = 2x + 4$, $y = –3x + 4$, $y = 3x – 2$ (x az alaphalmaz, y a képhalmaz eleme).
A hozzárendelés szabálya: minden x-hez valahányszorosát, + egy számot rendelünk.
Általános képlete: $y = a \cdot x + b$, vagy $f(x) = a \cdot x + b$ (a és b tetszőleges számok);
„*a*” az a szorzószám, amely a függvény meredekségét jelöli, „*b*” értéke pedig megmutatja, hogy a grafikon hol metszi az y-tengelyt.
Grafikonja egyenes.

– **Konstans függvény:** olyan függvény, amely bármely x-hez ugyanazt az állandó y-t rendeli.
Grafikonja x-tengellyel párhuzamos egyenes.

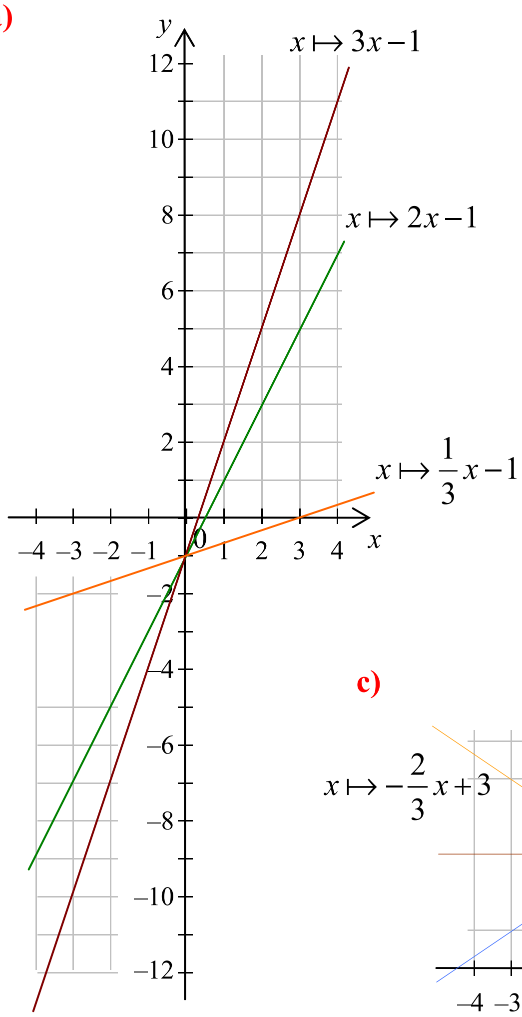
3. Ábrázold a megadott lineáris függvényeket közös koordinátarendszerben!

a) $x \mapsto 2x-1$ $\quad x \mapsto 3x-1$ $\quad x \mapsto \frac{1}{3}x-1$

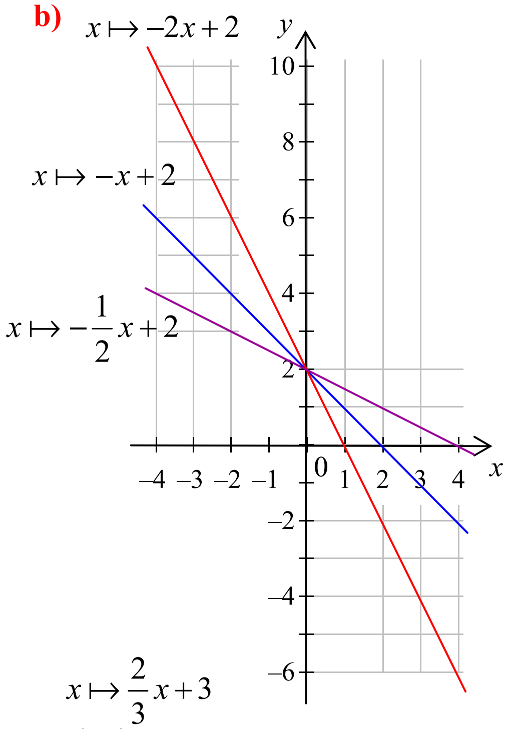
b) $x \mapsto -x+2$ $\quad x \mapsto -2x+2$ $\quad x \mapsto -\frac{1}{2}x+2$

c) $x \mapsto \frac{2}{3}x+3$ $\quad x \mapsto -\frac{2}{3}x+3$ $\quad x \mapsto 3$

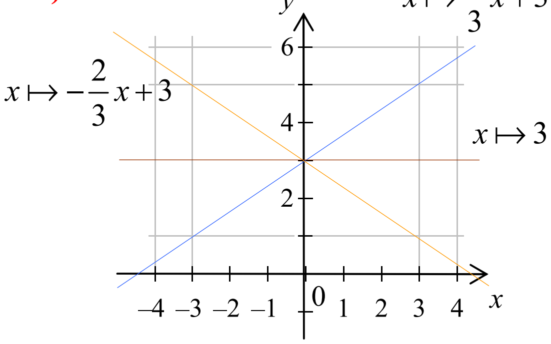
a)


$x \mapsto 3x-1$
$x \mapsto 2x-1$
$x \mapsto \frac{1}{3}x-1$
y
x
12
10
8
6
4
2
0
–2
–4
–6
–8
–10
–12
–4 –3 –2 –1
1 2 3 4

b)


$x \mapsto -2x+2$
$x \mapsto -x+2$
$x \mapsto -\frac{1}{2}x+2$
y
x
10
8
6
4
2
0
–2
–4
–6
–4 –3 –2 –1
1 2 3 4

c)


$x \mapsto \frac{2}{3}x+3$
$x \mapsto -\frac{2}{3}x+3$
$x \mapsto 3$
y
x
6
4
2
0
–4 –3 –2 –1
1 2 3 4

VI. Tartományok a koordinátarendszerben

1. Lineáris függvények szabályának kitalálása

Négyzethálós táblára rajzolunk egy koordinátarendszert. Mindkét tengelyen 1 rács az egység. Megmondjuk a gyerekeknek, hogy egy papírlapra egy lineáris függvény képletét írtuk, de nem mutatjuk meg, hanem a papírlapot lefordítva lehelyezzük a tanári asztalra. Nekik kell kitalálni, hogy melyik függvényre gondoltunk. Segítségül a koordinátarendszert hívjuk. A függvény grafikonjának pontjaira tippelhetnek a tanulók egy-egy összetartozó értékpárral. A tanár megmondja, hogy a tanuló által mondott pont a papírlapra írt függvény grafikonja alatt, fölött, vagy rajta van. Ezt a pontot jelöljük adott színnel a táblai koordinátarendszeren! Lehet például az alatta lévő pontokat zölddel, a fölötte lévőket kékkel, a grafikon pontjait pirossal ábrázolni. A gyerekek felváltva jöjjenek a táblához felrajzolni a saját tippjeiket! A sok kék és zöld pont által kialakult két tartomány határvonalán a piros pontok meghatározzák a függvény grafikonját. Mivel a lineáris függvény képe egyenes, két piros pont elegendő a grafikon felrajzolásához.

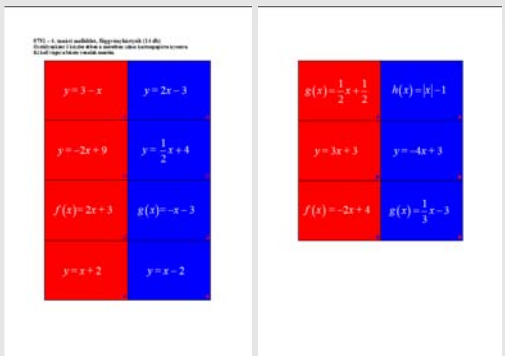
Jutalmazhatjuk azt a tanulót, aki fel tudja rajzolni a keresett függvény grafikonját, vagy „csak” a meredekséget állapítja meg, de legjobban azt, aki a hozzárendelést meg tudja határozni.

3-4 játékot játsszunk, egyszerű függvényeket adjunk, mint például $f(x) = 3x + 2$; $g(x) = –3x + 1$; $h(x) = –x – 2$; $y = \frac{1}{2}x + 2$!

2. Egyenletek grafikus megoldásának előkészítése

A „fogócska” játékkal előkészíthetjük az egyenletek grafikus megoldásának megértését.

4. tanári melléklet – lásd a modul eszközei közt!

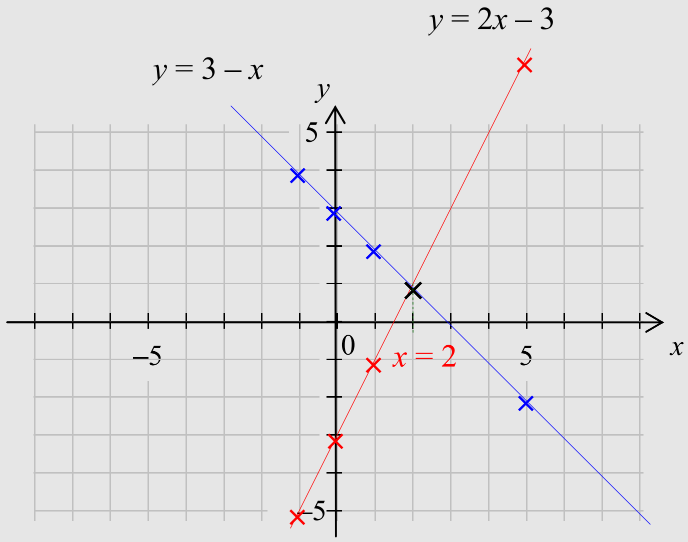


A megoldások, az összetartozó kártyapárokat jelölő szimbólumok szerint:

* : $x = 2$; ♪ : $x = 2$;
♫ : $x = –2$; ♥ : nincs megoldás;
♦ : $x_1 = –1$ és $x_2 = 3$;
♣ : $x = 0$; ♠ : $x = 3$.

A négyzethálós táblára most is rajzoljunk egy koordinátarendszert (mindkét tengelyen 1 rács az egység), ezenkívül egy táblázatot az alábbi minta szerint! Két önként jelentkező gyerek kapjon a kezébe egy-egy függvényt piros, illetőleg kék kártyán! Hívjunk ki még egy tanulót jegyzőnek!
Az osztály többi tanulója nem ismeri a hozzárendelések szabályát, de meg kell találniuk azt az x értéket, amelyre mindkét függvény helyettesítési értéke azonos. Egymás után mondanak számokat. Minden elhangozott szám után a két önkéntes gyerek kiszámolja a helyettesítési értéket, a táblára rajzolt koordinátarendszerben a saját színével jelöli a pontot, ugyanakkor a jegyző beírja a táblázatba a mondott x értéket és a hozzátartozó y függvényértékeket, valamint, hogy melyik helyettesítési érték nagyobb.

Ilyen módon a táblán kirajzolódik a kék és piros függvény grafikonja, ebből is és a táblázatból is megfigyelhető a függvényértékek közeledése egymáshoz, hamar megtalálható az az x szám, amelyre teljesül a két függvény egyenlősége. 3-4 játékot játsszunk!
Ha például a kék kártyán az $y = 3 - x$, a piroson az $y = 2x - 3$ függvények szerepelnek, akkor a tábla képe ilyen lehet:



x	kék függvény	reláció	piros függvény
5	–2	<	7
–1	4	>	–5
0	+3	>	–3
1	2	>	–1
2	1	=	1

Az utolsó két függvénykártya lehet a 10. feladatlap 1. feladatának két függvénye.

3. Egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása

10. FELADATLAP

Ábrázold a két függvény grafikonját közös koordinátarendszerben! Az alaphalmaz a racionális számok halmaza.

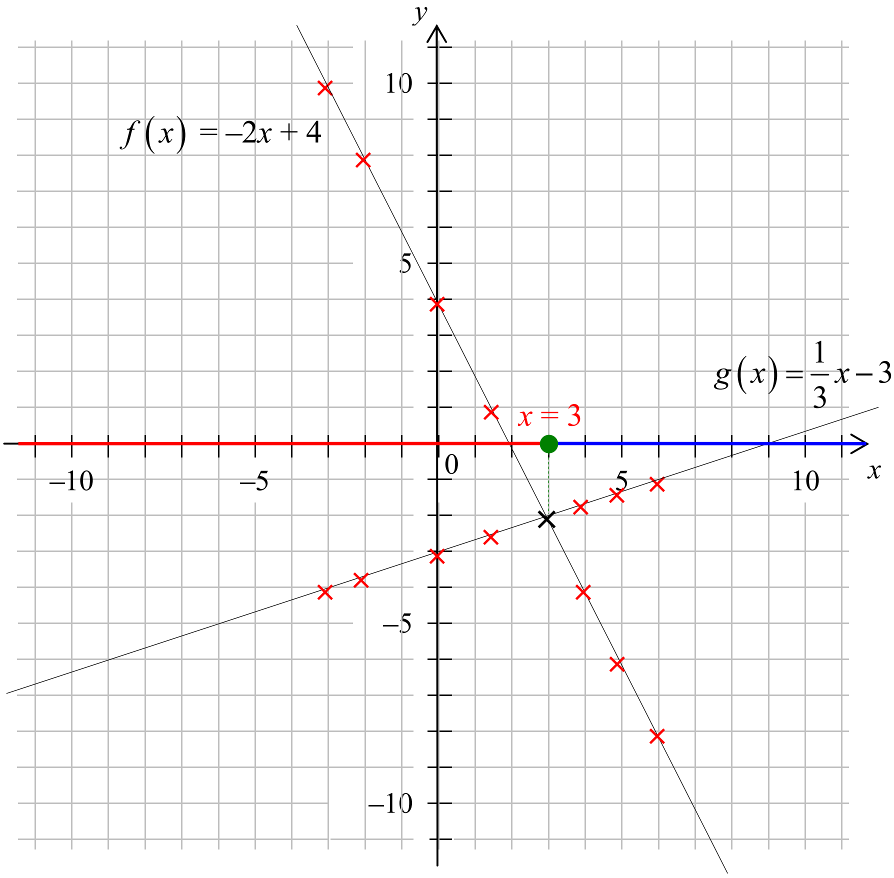
$f(x) = -2x + 4;\ g(x) = \frac{1}{3}x - 3$

Olvasd le a grafikonról, hogy mekkora a függvények értéke különböző x helyeken! Írd be ezeket a táblázatba!

x	–3	–2	0	1,5	3	4	5	6
$f(x) = -2x + 4$	10	8	4	1	–2	–4	–6	–8
$g(x) = \frac{1}{3}x - 3$	–4	$-3\frac{2}{3}$	–3	–2,5	–2	$-1\frac{2}{3}$	$-1\frac{1}{3}$	–1

Jelöld meg zöddel az x-tengelyen azokat a pontokat, amelyeknél a két függvény értéke egyenlő! Hány ilyen pont van?
Keress olyan pontokat az x-tengelyen, amelyeknél az $f(x) > g(x)$, színezd ezeket pirossal. Hány ilyen pont van?
Keress olyan pontokat az x-tengelyen, amelyeknél az $f(x) < g(x)$, színezd ezeket kékkel. Hány ilyen pont van?
Mi a megoldása a következő egyenletnek, egyenlőtlenségeknek:

$-2x + 4 = \frac{1}{3}x - 3$ $x = 3$ $-2x + 4 > \frac{1}{3}x - 3$ $x < 3$ $-2x + 4 < \frac{1}{3}x - 3$ $x > 3$

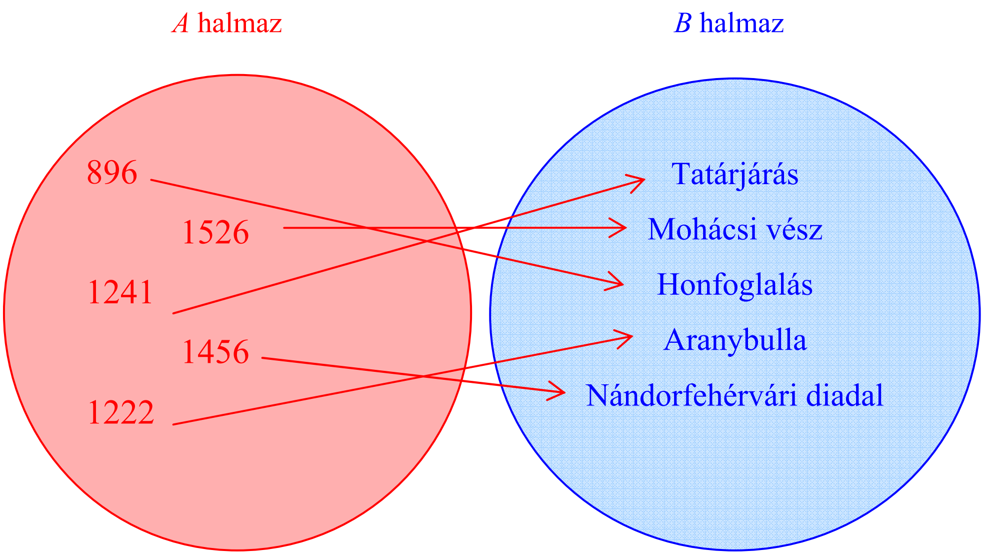


y
x
10
5
0
–5
–10
–10
–5
5
10
$f(x) = -2x + 4$
$g(x) = \frac{1}{3}x - 3$
$x = 3$

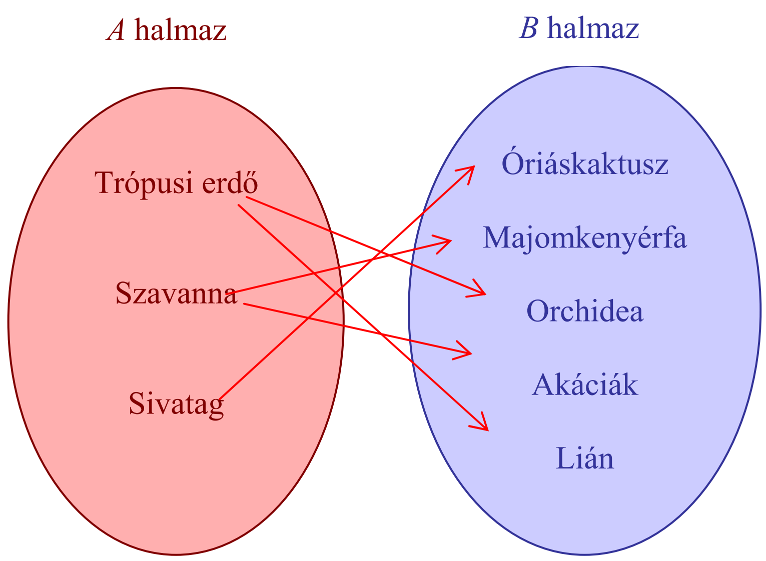
FELADATGYŰJTEMÉNY

1. Melyik esemény mikor történt?

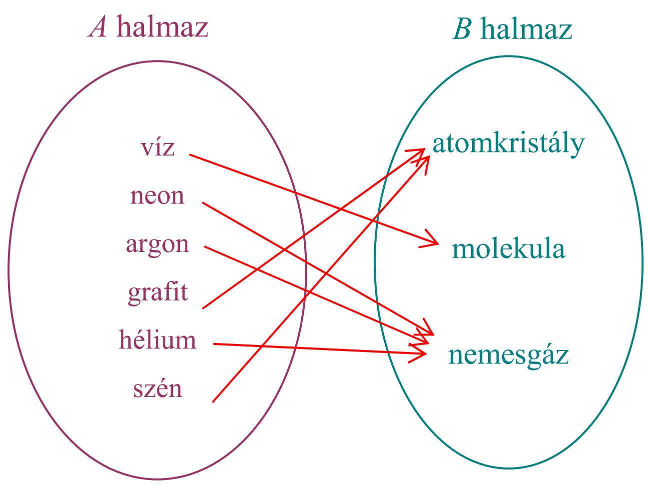
Rajzolj két halmazt, és kösd össze nyíllal az összetartozó elemeket!
A = {896; 1526; 1241; 1456; 1222}
B = {Tatárjárás; Mohácsi vész; Honfoglalás; Aranybulla; Nándorfehérvári diadal}
1241 → Tatárjárás
1456 → Nándorfehérvári diadal
896 → Honfoglalás
1526 → Mohácsi vész
1222 → Aranybulla



2. Az A halmaz elemeihez rendeld hozzá a B halmaz elemeit!
Rajzolj két halmazt, írd be az elemeket! Kösd össze A halmaz elemeiből kiinduló nyíllal, hogy melyik növény hol él!
A = {trópusi erdő, szavanna, sivatag}
B = {óriáskaktusz, majomkenyérfa, orchidea, lián, akáciák}
trópusi erdő → orchidea, lián
szavanna → majomkenyérfa, akáciák
sivatag → óriáskaktusz

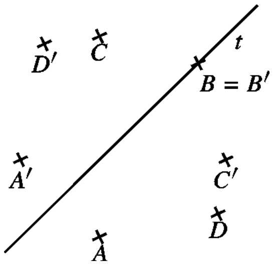


3. Az A halmaz elemeihez rendeld hozzá a B halmaz elemeit!
Rajzolj két halmazt, és az A halmaz elemeiből kiinduló nyíl jelezze, melyik B halmaz-beli elemet rendelted hozzá!
A ={víz, neon, argon, grafit, hélium, szén}
B ={atomkristály, molekula, nemesgáz}
víz → molekula neon → nemesgáz argon → nemesgáz
grafit → atomkristály hélium → nemesgáz szén → atomkristály



4. A következő hozzárendelések közül válaszd ki, melyek az egyértelmű hozzárendelések!
a) A = {13 éves tanulók } K = {iskolák}
Minden tanulóhoz rendeljük hozzá azt az iskolát, ahol tanulmányait végzi.
b) A = {az iskolád ablakai} K = {egész számok}
Minden ablakhoz rendeljük hozzá az ablakban lévő virágok számát.
c) A = {az iskolád osztálytermei} K = {egész számok}
Minden osztályteremhez az ablakok számát rendeljük.
d) A = {az iskolád tantermei} K = {az iskolában található számítógépek}
Minden tanteremhez hozzárendeljük azt a számítógépet, ami a teremben van.
e) A = {a sík egy adott P pontja} K = {a sík pontjai}
A P ponthoz rendeljük hozzá a tőle 3 cm-re levő pontokat.
Egyértelmű hozzárendelések: **a)**; **b)**; **c).**

5. Állapítsd meg az alaphalmazt, képhalmazt! Mi lehet az ábrázolt hozzárendelés? Függvény-e a hozzárendelés?



A={a sík pontjai} *K*={a sík pontjai }

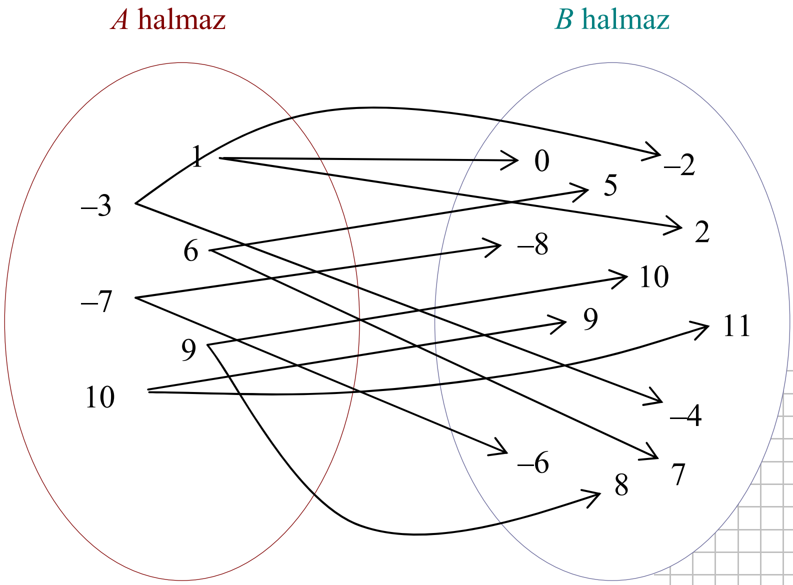
A sík pontjaihoz a *t* tengelyre vonatkozó tengelyes tükörképüket rendeljük hozzá. Függvény.

6. Készíts számhalmazokkal hozzárendelést! Megadtuk az *A* halmazt, a *B* halmaz megadása után keress *A*-ból *B*-be hozzárendelést!
A = {A 20-nál kisebb pozitív, hárommal osztható számok halmaza}
A számhalmazok közötti hozzárendelés tetszőleges lehet. Pl.: rendeljük *A* elemeihez a harmadrészüket!

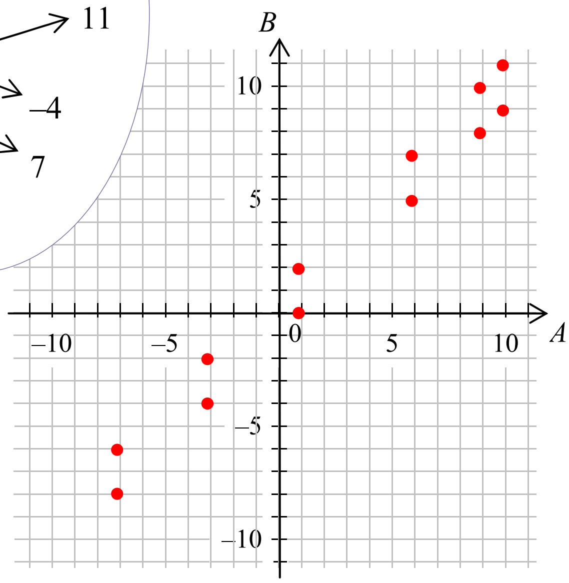
7. Készíts számhalmazokkal hozzárendelést! Megadtuk az *A* halmazt, a *B* halmaz megadása után keress *A*-ból *B*-be hozzárendelést!
A = {10-nél kisebb pozitív egész számok}
Nagyon sok lehetőség van. Egy lehetséges: rendeljük hozzá minden számhoz az ellentettjét!

8. Ábrázold koordinátarendszerben a hozzárendelést a megadott számok halmazán! Keress az ábrának megfelelő hozzárendeléseket!

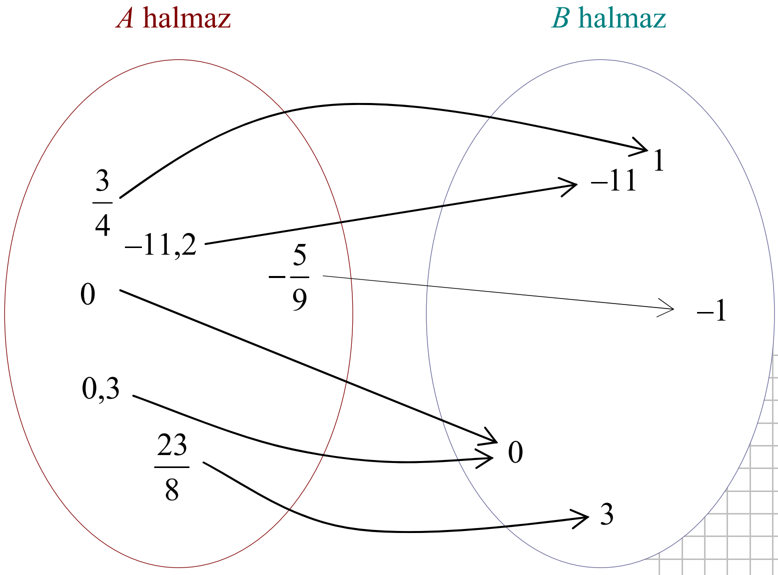
a)



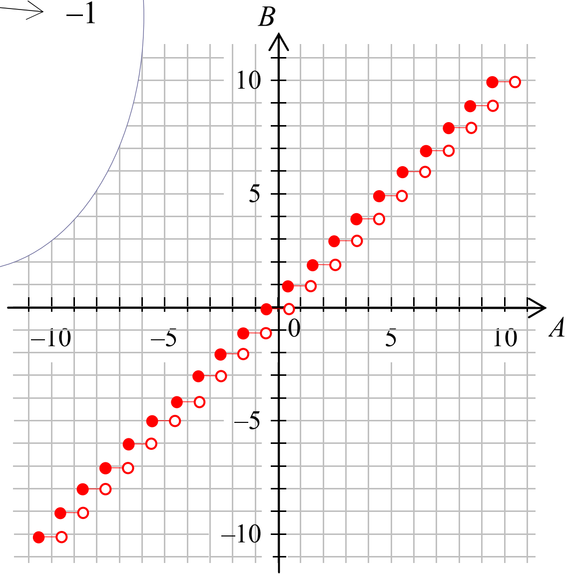
A={egész számok}
B={egész számok}
Az egész számokhoz a szomszédos egész számokat rendeljük.



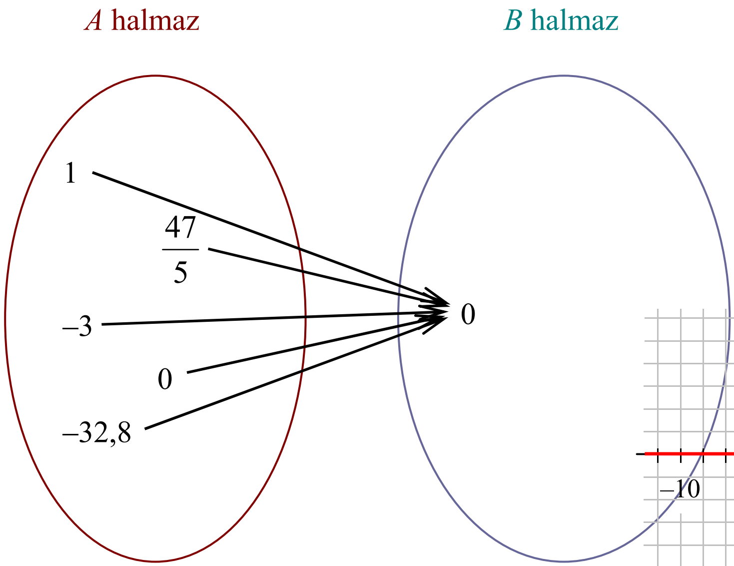
b)



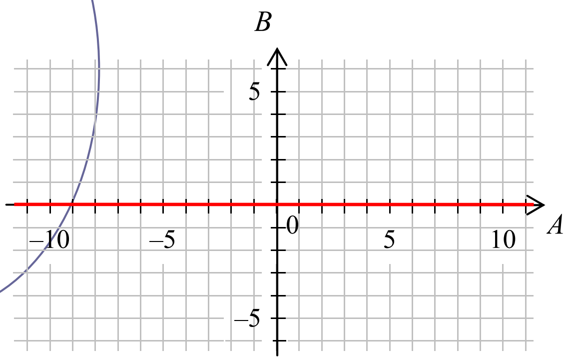
A={racionális számok}
B={egész számok}
A racionális számokhoz egészre kerekített értékeiket rendeljük.



c)



A={racionális számok}
B={0}
Minden racionális számhoz a 0-t rendeljük hozzá.



9. Ábrázoljátok a következő hozzárendeléseket külön koordinátarendszerben!

a) Legyen az alaphalmaz és a képhalmaz is a racionális számok halmaza. Hozzárendelési szabály: $y = 12x$

b) Legyen az alaphalmaz és a képhalmaz a természetes számok halmaza.

Hozzárendelési szabály: a megvásárolt kiflikhez a fizetett értéket rendeljük, ha 1 kifli 12 Ft-ba kerül. Az első tengelyen a kiflik számát, a második tengelyen a kiflikért fizetett értéket ábrázoljátok!
Különböző-e a két hozzárendelés grafikonja? Miért?
A két hozzárendelés grafikonja abban különbözik, hogy az **a)** részben megadott függvény megrajzolható egy folytonos vonallal, míg a **b)** részben megadott azért nem, mert csak egész helyeken van értelmezve.

10. Rendeljünk természetes számokhoz ismét természetes számokat!

k: Kacsák számához hozzárendeljük a lábaik számát.
r: Rókák számához hozzárendeljük a lábaik számát.
s: Sáskák számához hozzárendeljük a lábaik számát.

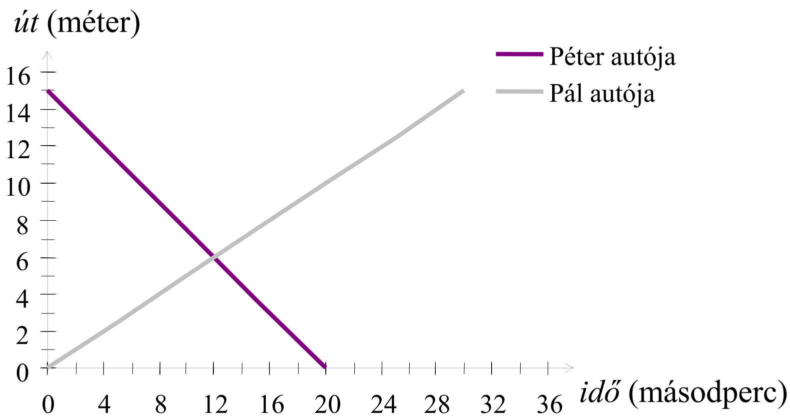
a) Készíts táblázatot a *k*, *r*, *s* hozzárendelésekhez!
b) Függvények-e ezek a hozzárendelések? Miért? Írásban válaszoljatok!
c) Melyik hozzárendelést kapcsolhatjátok a fent megadottakhoz az alábbiak közül?

$$f(x) = 6 \cdot x; \quad g(x) = x + 6; \quad h(x) = \frac{1}{4} \cdot x \quad i(x) = x \cdot 4; \quad j(x) = 2 \cdot x$$

d) Ábrázoljátok a *k*; *r*; *s* függvényeket közös koordinátarendszerben! Olvass a grafikonról!
e) Megrajzolhatók-e a grafikonok egy vonallal? Miért? Írásban válaszoljatok!
f) Melyik függvény grafikonja a „legmeredekebb”?
g) Miért az origóból indul ki mindegyik hozzárendelt grafikon?
h) Hány rókának van annyi lába, mint 6 kacsának?
i) Hány kacsához, rókához, sáskához tartozik 24 láb?
j) Ismertek-e olyan állatot, melynél a hozzárendelés $v(x) = 10 \cdot x$ lenne?

a) A táblázatot a tanulók önállóan elkészítik.
b) Ezek mind függvények, mert egyértelmű hozzárendelések.
c) Összekapcsolhatók: *k* és *j*, *r* és *i*, *s* és *f*.
d) A $k = j(x)$; $r = i(x)$ és $s = f(x)$ függvények grafikonja átmegy az origón, és csak egészeken értelmezett.
e) Nem rajzolhatók meg egy vonallal, mert csak egészeken értelmezettek.
f) A „legmeredekebb” az *f* függvény grafikonja: m=6.
g) Mert 0 állatnak 0 lába van.
h) 6 kacsának 12 lába van, 12 lába 3 rókának van.
i) 12 kacsához, 6 rókához, 4 sáskához tartozik.
j) Igen, a hatodikos természetismeret könyvben is szerepel: kecskerák.

11. Péter és Pál távirányítású autókkal játszanak. Egymástól 15 m távolságra állnak, egy egyenes útszakaszon. Péter autója 20 másodperc alatt teszi meg Pálig az utat, Pál autója 30 másodperc alatt ér Péterhez.
Koordinátarendszerben ábrázoltuk a két autó mozgását. Milyen megfigyeléseket tehetünk?



– Pál autójának indulási pontja az origó, tőle 15 m távolságban áll Péter, ezért a grafikonon a 0. másodpercben az y-tengelyen egymástól 15 m-re vannak.

– az autók egymással szemben egyenes vonalban egyenletesen mozognak.

– Péter autója 20 másodperc múlva ért Pál kiindulási helyére.

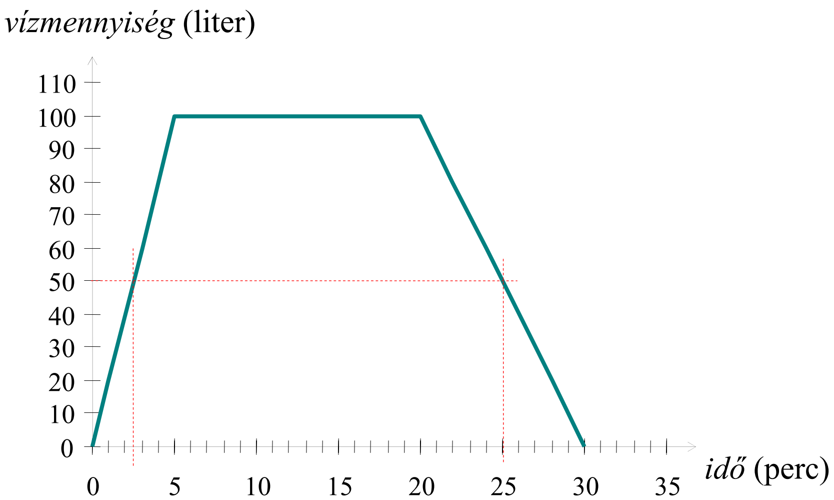
– A két autó szemben elhaladt egymás mellett. Ezt abból láthatjuk, hogy a két mozgásgrafikon metszi egymást.

– Mikor találkoztak? Megnézzük a grafikonon, hogy a metszéspont melyik időponthoz tartozik. A grafikonról leolvasható, hogy az indulás után 12 másodperc múlva találkoztak.

– Hol találkoztak? A metszéspont második koordinátája adja meg Pál tartózkodási helyétől számítva a találkozás helyét. Pál autója 6 m-t, Péter autója 9 m-t tett meg a találkozásig. Tehát Páltól számítva 6 m-re találkoztak.

12. Fürdéshez 5 perc alatt töltöttük meg a 100 literes kádat vízzel. Negyed óráig fürödtünk, majd leengedtük a vizet. A lefolyón percenként 10 liter víz folyik le. Ábrázold az eltelt idő függvényében a kádban levő víz térfogatát! A csap megnyitásához képest mikor volt a kádban 50 liter víz?

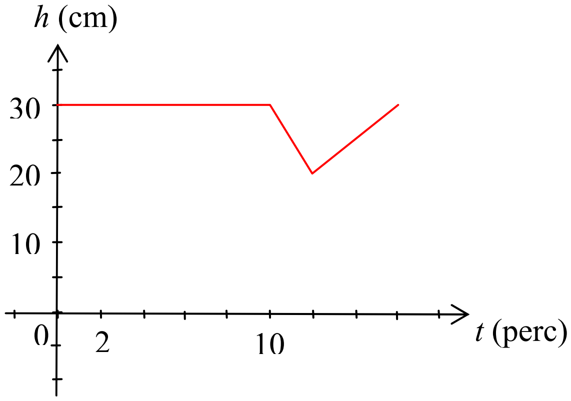
Megoldás:



50 liter víz kétszer volt, a befolyáskor 2,5 perccel a csap megnyitása után, illetve a kifolyáskor a csap megnyitása után 25 perccel.

13. Péter kisöccse pancsol a fürdőkádban. 10 perc játék után kihúzza a dugót. 2 perc múlva észreveszi az anyukája, de addigra 10 cm-t csökkent a víz magassága. Az édesanya visszateszi a dugót, és újra enged vizet a kádba 4 percig. Ekkor a víz magassága az eredeti 30 cm-es magasság lesz.

Ábrázold a kádban lévő víz magasságát az idő függvényében!



14. A felsorolt lineáris függvényeket a racionális számok halmazán értelmezzük. Ábrázold a függvényeket koordinátarendszerben, állapítsd meg, hol metszik a grafikonok az x-, y-tengelyeket!

a) $a(x) = 2x$ $x = 0$; $y = 0$

b) $b(x) = -x + 8$ $x = 8$; $y = 8$

c) $c(x) = \frac{1}{3}x - 2$ $x = 6$; $y = -2$

d) $d(x) = 4 - 3x$ $x = \frac{4}{3}$; $y = 4$

15. Válaszd ki a lineáris függvényeket a felsoroltak közül!

$f(x) = x - \frac{2}{3}$ $g(x) = \frac{5}{x}$ $h(x) = |x - 3|$ $l(x) = \frac{x+7}{3}$

$f(x) = x - \frac{2}{3}$; $l(x) = \frac{x+7}{3}$

16. Mely függvények grafikonjai párhuzamosak egymással?

$f(x) = x + 9$; $g(x) = 9$; $h(x) = 9x$; $l(x) = \frac{1}{9}x$; $k(x) = \frac{1}{9}$;

$i(x) = 5 + 9x$; $j(x) = x - 9$

Párhuzamosak:

$f(x) = x + 9$ és $j(x) = x - 9$; $g(x) = 9$ és $k(x) = \frac{1}{9}$; $h(x) = 9x$ és $i(x) = 5 + 9x$

17. Van-e olyan lineáris függvény, amelynek grafikonja párhuzamos az y-tengellyel? Indokolj!
Ez nem egyértelmű hozzárendelés, így nem is függvény. Persze ilyen egyenes végtelen sok van.

18. Hol metszi egymást az $f(x) = 7$ és a $g(x) = -\frac{1}{2} \cdot x + 5$ függvény grafikonja, ha a függvényeket a racionális számok halmazán értelmezzük? A metszéspont: M (–4;7)

19. Ábrázold közös koordinátarendszerben a lineáris függvényeket! Készíthetsz táblázatot az ábrázoláshoz! Az ábrázoláshoz használj különböző színeket!

a) $f(x)=\frac{2}{3}\cdot x$ és $g(x)=\frac{2}{3}\cdot x-4$

Hol metszi egymást a két függvény grafikonja? Miért?
Van-e egyenes arányosság a megadott függvények között?
Igaz-e, hogy a *g(x)* függvény grafikonja az *f(x)* függvény grafikonja alatt halad? Miért?

b) $v(x)=-\frac{3}{4}\cdot x+1$ és $u(x)=-\frac{3}{4}x-2$

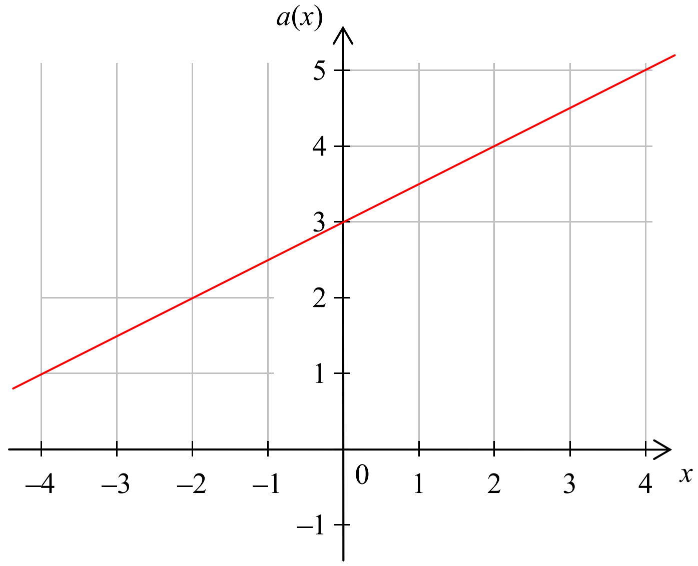
Hol metszi egymást a két függvény grafikonja? Miért? Van-e egyenes arányosság a megadott függvények között?
Igaz-e, hogy a *v(x)* függvény grafikonja az *u(x)* függvény grafikonja alatt halad? Miért?

a) A vizsgált függvények grafikonjai párhuzamos egyenesek, ezért nem metszik egymást. Az $f(x)$ függvény egyenes arányosság. Igaz, mert a $g(x)$ függvény minden értéke 4-gyel kisebb, mint az $f(x)$ függvény megfelelő értéke.

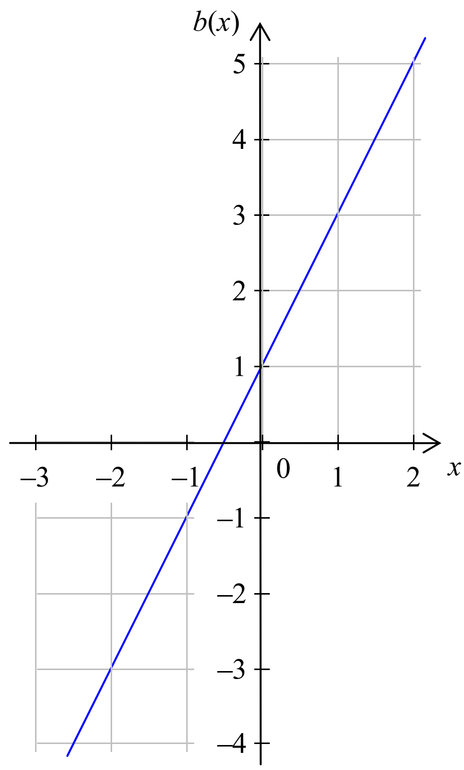
b) A vizsgált függvények grafikonjai párhuzamos egyenesek, ezért nem metszik egymást. Nincs. Nem igaz, mert a $v(x)$ függvény minden értéke 3-mal nagyobb, mint az $u(x)$ függvény megfelelő értéke.

20. A következő hozzárendelési szabályok is lineáris függvényt határoznak meg? Táblázat készítése és ábrázolás után tudsz válaszolni erre a kérdésre.
Próbáld megadni a hozzárendelési szabályt a legegyszerűbb alakban!
A táblázatok elkészítése után felrajzolható a függvény grafikonjának tetszőlegesen sok pontja. Ezek alapján válaszolhatnak a tanulók a feltett kérdésekre.

a) $a(x)=\frac{x+6}{2}=\frac{1}{2}x+3$



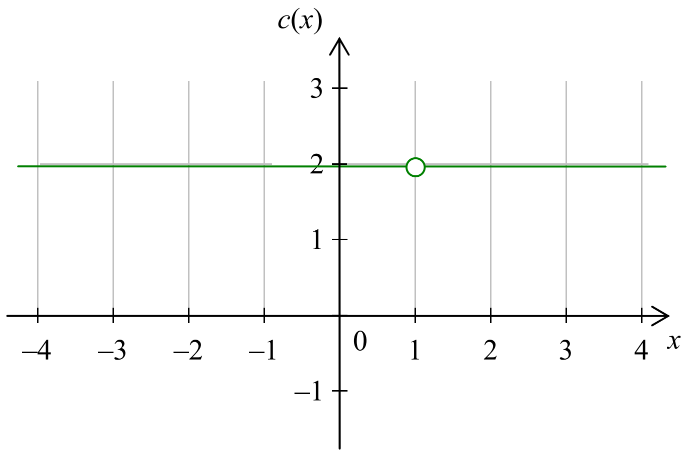
b) $b(x) = 3(x+2) - (x+5) = 2x+1$



c) $c(x) = \dfrac{2x-2}{x-1} = 2$, ha $x \neq 1$

A $c(x)$ függvény grafikonja az x tengellyel párhuzamos, az 1 pont kivételével megegyezik a $d(x) = 2$ konstans függvény grafikonjával.

Fel kell hívni a figyelmet arra, hogy a $c(x)$ függvény az $x = 1$ pontban nincs értelmezve.



21. Add meg a hozzárendelési szabályát annak a lineáris függvénynek, amely a P (–5; 8) és Q (–1; 0) pontokon halad át!

A hozzárendelési szabály: $f(x) = -2 \cdot x - 2$

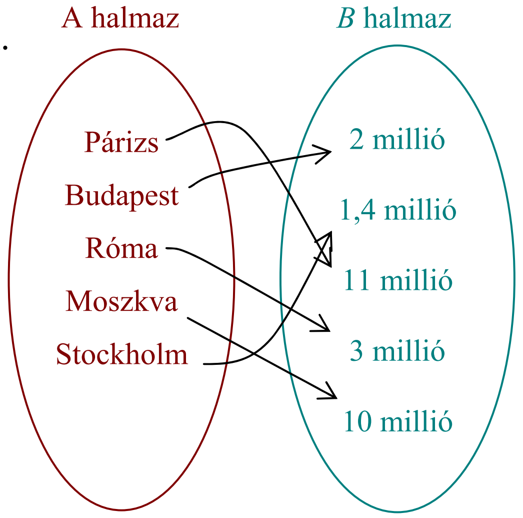
22. Adj meg olyan lineáris függvényt, melynek grafikonja párhuzamos az $f(x) = \dfrac{8 \cdot x - 3}{5}$ függvény grafikonjával, és olyat is, amely az y-tengelyt ugyanott metszi!

A hozzárendelés így is írható $f(x)=\frac{8}{5}\cdot x-\frac{3}{5}$. Ennek grafikonjával párhuzamosak a $h(x)=\frac{8}{5}x+b$ függvények grafikonjai. Az y-tengelyt ugyanabban a pontban metszők a $g(x)=mx-\frac{3}{5}$ függvények grafikonjai.

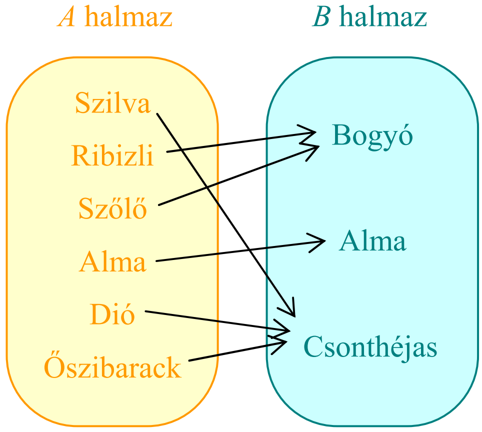
0791 – 1/a tanári melléklet, hozzárendelések

Osztályonként 1 példány ebben a méretben írásvetítő fólián.

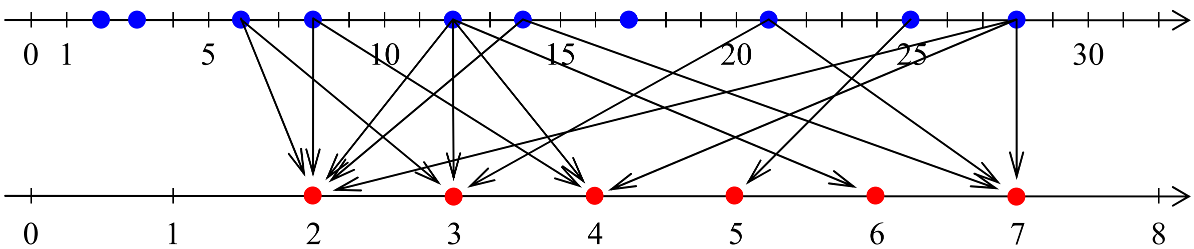
1.



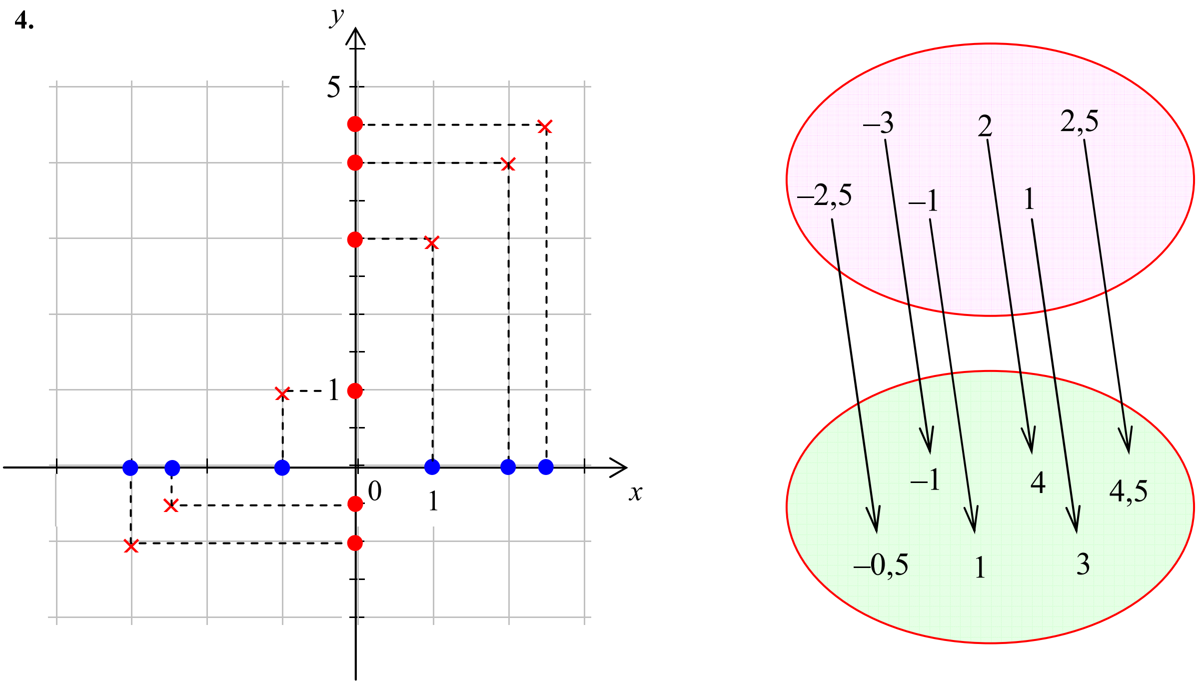
2.



3.



4.



0791 – 1/b tanári melléklet, hozzárendelés-kártyák

Osztályonként 1 példány ebben a méretben írásvetítő fólián. A kártyákat ki kell vágni a fekete vonalak mentén. A határok ne látsszanak.

Alaphalmaz	Alaphalmaz	Alaphalmaz	Alaphalmaz
Alaphalmaz	Képhalmaz	Képhalmaz	Képhalmaz
Képhalmaz	Képhalmaz	Egyértelmű hozzárendelés	Egyértelmű hozzárendelés
Egyértelmű hozzárendelés	Egyértelmű hozzárendelés	Nem egyértelmű hozzárendelés	

0791 – 2. tanári melléklet, függvényjáték-kártyák (25 db kártya)

Osztályonként 1 készlet ebben a méretben kartonpapírra vagy műanyaglapra nyomva. Ki kell vágni a fekete vonalak mentén.

5	-2
$\frac{1}{2}$	$-8{,}2$

20	–25
10	–2,5

41	–100
7,5	–3

$\frac{3}{4}$	$-12,3$
30	4

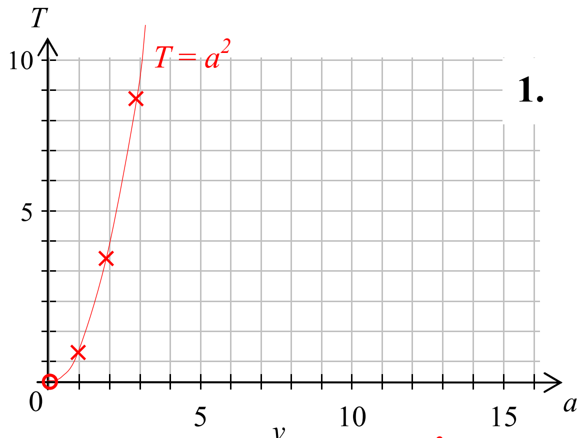
10	–2
–18	0

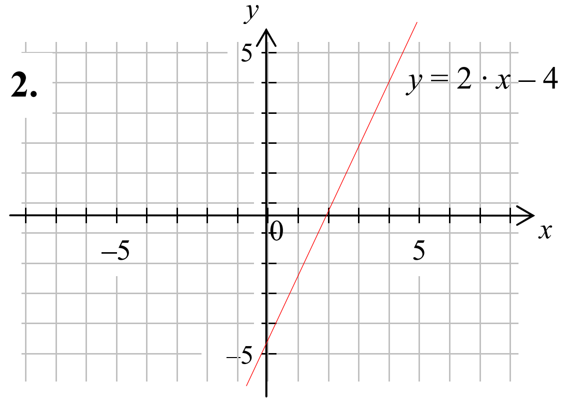
2	5
–1	–9

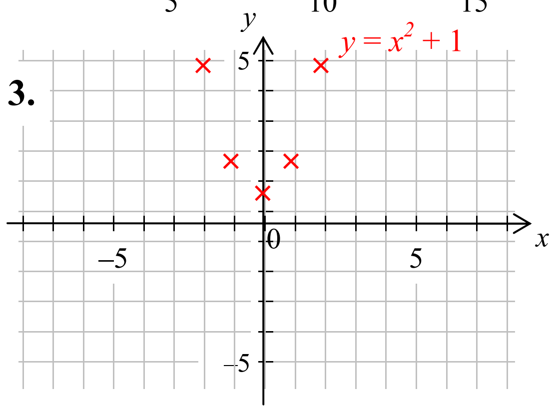
0

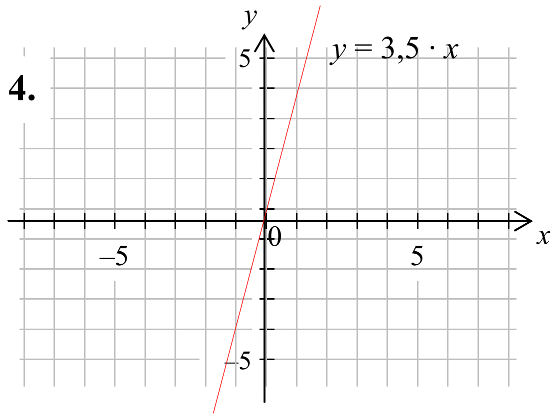
0791 – 3. tanári melléklet

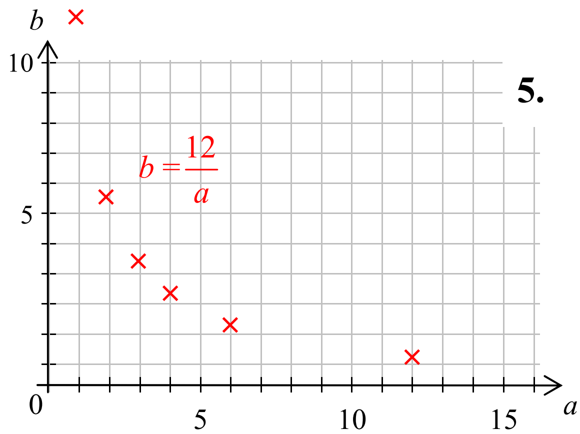
Osztályonként 1 példány ebben a méretben írásvetítő fólián.

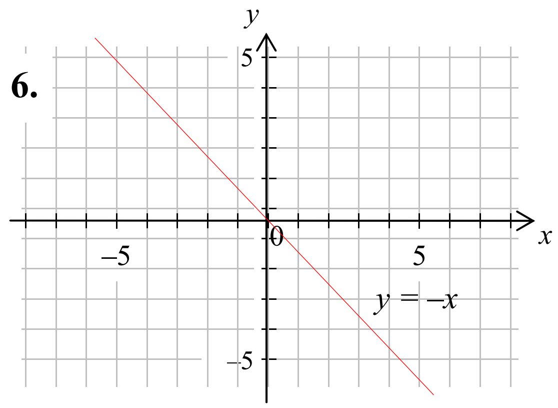


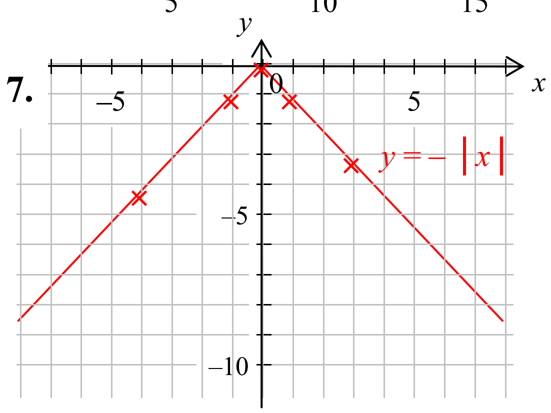


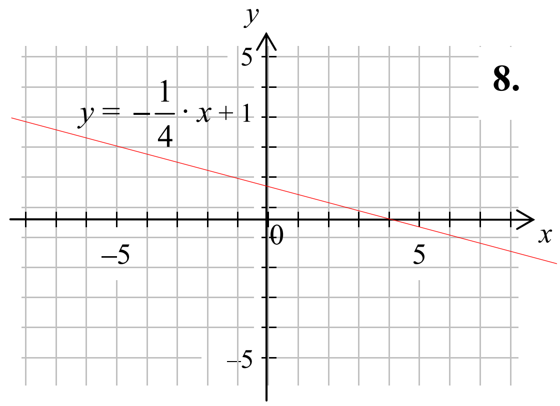












0791 – 4. tanári melléklet, függvénykártyák (14 db)

Osztályonként 1 készlet ebben a méretben színes kartonpapírra nyomva.
Ki kell vágni a fekete vonalak mentén.

$y = 3 - x$ *	$y = 2x - 3$ *
$y = -2x + 9$ ♪	$y = \frac{1}{2}x + 4$ ♪
$f(x) = 2x + 3$ ♫	$g(x) = -x - 3$ ♫
$y = x + 2$ ♥	$y = x - 2$ ♥

$g(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ ♦	$h(x)=\lvert x\rvert-1$ ♦
$y=3x+3$ ♣	$y=-4x+3$ ♣
$f(x)=-2x+4$ ♠	$g(x)=\frac{1}{3}x-3$ ♠