Kalmár verseny - a döntő feladatai

1. Egyszer két juhász így beszélgetett:

   – Adj nekem 8 bárányt, akkor nekem is annyi lesz, mint neked! – Inkább te add nekem a bárányaid felét, s akkor nekem 7-szer annyi lesz, mint neked.

   Hány báránya volt egyik-egyik juhásznak?

2. A tavon úszott egy labda, majd a tél beálltával befagyott a tó vize, s befagyott a labda. A labdát sikerült eltávolítani, így visszamaradt egy 24 cm átmérőjű, 6 cm mély "lyuk".

   Mennyi a labda sugara?

   (Feltételezzük, hogy a labda gömb alakú, gumiból készült és belül üres! A labda középpontja a víz felszíne felett volt.)

3. Egy körbe írható hatszögnek 6 darab $120°$-os szöge van. Következik-e ebből, hogy a sokszög szabályos?

4. Dudley Langford skót matematikus tiszteletére nevezzük DudLa számoknak azokat a számokat, amelyeknek minden számjegye legalább kétszer szerepel a számban, és az is igaz, hogy bármely két ugyanolyan értékű számjegy között annyi darab más értékű számjegy áll, mint amennyi azok értéke. Például ilyen DudLa szám a 723 121 327, mert két 1-es között 1 db, két 2-es között 2 db, két 3-as között 3 db, két 7-es között 7 db tőle különböző értékű számjegy áll. Ebben a számban 3 darab 2-es van, a két szélső kettesre nem vonatkozik a szabály!

   Melyek a hétjegyű DudLa számok?

5. Az $ABCDE$ szabályos ötszög. Az A csúcsból állítsunk merőlegeseket a BC, CD és DE oldalak egyenesére. A merőlegesek talppontjai legyenek rendre Q, P és R. Legyen O az ötszög köré írható kör középpontja.

   Ha $OP = 1$, akkor mivel egyenlő $AO + AQ + AR$?

6. Bontsd fel a 13157-et négy szám összegére úgy, hogy ha az első részhez 2-t hozzáadunk, a második részből 3-at elveszünk, a harmadik részt 7-tel megszorozzuk, a negyedik részt 11-gyel elosztjuk, akkor mindig ugyanazt a számot kapjuk!

7. Egy tíz résztvevős asztalitenisz versenyen mindenki pontosan egyszer mérkőzött mindenkivel. Az egyes versenyzők győzelmeinek száma a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, vereségeinek száma rendre A, B, C, D, E, F, G, H, I, J.

   Bizonyítsd be, hogy a versenyzők által szerzett győzelmek száma négyzetének összege ugyanannyi, mint a vereségek száma négyzetének összege.

8. Keress olyan prímszámokat, amelyekre igaz, hogy alkalmas számrendszerben felírva a számrendszer minden számjegyét pontosan egyszer használjuk fel? (0 nem állhat elől!)

   Igazold, hogy a hetes, illetve a tízes számrendszerben nincs ilyen szám.

9. Legfeljebb hány oldalú lehet egy olyan konvex sokszög, amely feldarabolható olyan derékszögű háromszögekre, amelyek hegyesszögei 30 és 60 fokosak?

   (Megjegyzés: a feldarabolás során csak ilyen háromszög keletkezhet, másféle sokszög nem.)

10. Bizonyítsd be, hogy minden természetes szám előállítható $a^2 + b^2 - c^2$ alakban, ahol a, b, c egész számok!