

## Térgeometriai feladatok

Katz Sándor és Jakab Tamás válogatása.

1. 64 db 1 cm élű kockából egy 4 cm élű kockát ragasztunk össze gyenge ragasztóval. (Ez azt jelenti, hogy a kockák egyben maradnak, de ki lehet szedni belőle kockákat, de a többi érintkező lap együtt marad.) Ezután befestjük a 4 cm élű kockát. Majd kiszedjük azokat a kockákat, amelyeknek legfeljebb egy lapja van befestve. (Középről is kiszedjük azokat a kockákat, amelyek festetlenek.) A megmaradó építménynek mekkora a festett és a festetlen felszíne?
2. Fel lehet-e darabolni egy kockát 48 kockára? És 20 darab kockára? És 2012 kisebb kockára?
3. Egy  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  kocka alakú terem élei 3 métereseek.
  - a) Mekkora utat kell megtenni egy légynek, hogy az  $AB$  él  $F$  felezőpontjából a  $D_1$  csúcsba repüljön?
  - b) Mekkora a legrövidebb útja egy hangyának, hogy a kocka felszínén haladva  $F$ -ből  $D_1$ -be jusson?
  - c) Rajzoljuk meg az  $AA_1 D_1 D$  lapon azon pontok halmazát, amelyek a kocka felszínén mérve egyenlő távolságra vannak  $F$ -től és  $D_1$ -től!
4. A vadászok medvét kergetnek. 1 km-t kergetik délre, 1 km-t nyugatra, 1 km-t északra és azt veszik észre, hogy ugyanoda érkeztek vissza, ahonnan elindultak. Milyen színű a medve?
5. Négy hajó megy az óceánon pontosan ügyelve arra, hogy bármely kettő távolsága pontosan 1 km legyen. Az első hajó gőzös, a második vitorlás, a harmadik evezős. Milyen a negyedik hajó?
6. Az északi féltekén, Kanadában levő A repülőtértől pontosan keletre kb. 1000 km-re van a B repülőtér, és szintén A-tól pontosan keletre kb. 2000 km-re a C repülőtér. A-tól pontosan délre szintén kb. 1000 km-re a D, és A-tól délre kb. 2000 km-re az E repülőtér. Egy-egy helikopter azt a feladatot kapja, hogy a lehető legrövidebb úton repüljön A-ból C-be, ill. A-ból E-be. Átrepül az első helikopter B felett ill. a második D felett?
7. Egy 4 dm élű kockát feketére festettünk, majd a kocka lapjaival párhuzamos síkokkal 1 dm élű kockákra vágjuk. Hány kis kockának lesz 4, 3, 2, 1, 0 festett oldala?
8. Egy kocka térfogata  $216 \text{ cm}^3$ . A kocka lapjait pirosra festjük, majd a kockát  $1 \text{ cm}^3$  térfogatú kis kockákra vágjuk. Hány kis kockának lesz pontosan két lapja piros?
9. Zsuzsi 20 db egyenlő nagyságú fehér kockából két 10 kocka magasságú tornyot épít úgy, hogy a kockákat teljes lappal érintkezve helyezi egymás fölé. Az így kapott két tornyot egymás mellé állítja, és szintén teljes lappal érintkezve összeragasztja. Ezt a testet ezután kék festékbe teszi. A kockák lapjai közül hány lesz így kék? ( A festék teljesen ellepi. )
10. Egy téglatest élei 4, 5 és 6 cm hosszúak. A téglatest minden lapját befestjük, majd a téglatest lapjaival párhuzamos síkokkal 1-es kiskockákra vágjuk szét. Hány lesz az így keletkező összes kis kockákon a festetlen lapok területének összege?
11. Egy 3 egység élű kocka 27 egybevágó kis kockából van összerakva. A középső kis kockában van egy bogár, amely át tud menni bármelyik szomszédos kis kockába. Bejárhatja-e a bogár az összes kockát úgy, hogy mindegyik kockában csak egyszer lesz?

12. Egy egér rágcsál egy 3 egység oldalú, kocka alakú sajtot, amely 27 egységkockából van összerakva. Amikor egy egységkocka sajtot megevett, átmegy a szomszédos, vele közös lappal rendelkező egységkockába és azt eszi. Előfordulhat-e, hogy az egér a középső kocka kivételével a többi 26 egységkockát megeszi?
13. Egy  $11 \times 6 \times 5 = 330$  db egységkockából álló, fából készült téglatestet egy szű az egyik átlója mentén végigrágott. Hány egységkockát károsított meg a szű?
14. Lehet-e  $1 \times 1 \times 1$ -es kis kockákból lapjaiknál összeragasztva azokat, olyan testet alkotni, melyek felülete 1997 négyzetegység.
15. Egy  $3 \times 3 \times 3$ -as kocka 27 kis kockája közül 14 fehér és 13 fekete. Lehetnek-e ezek úgy elhelyezve, hogy bármely (mind a 27)  $1 \times 1 \times 3$ -as oszlopban a) a fehér, b) a fekete kockák száma páratlan.
16. Ki lehet-e rakni egy  $6 \times 6 \times 6$ -os kockát  $1 \times 2 \times 4$ -es téglákból?
17. Van-e olyan háromszöglappokkal határolt konvex test, amelynek a) 2000, b) 2001 éle van?
18. Az  $ABCD$  tetraéder  $D$  csúcsba futó élei páronként merőlegesek egymásra. Az  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$ ,  $AD$ ,  $BD$ ,  $CD$  élek felezőpontjai rendre  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$ ,  $T$ ,  $U$ . Igazoljuk, hogy  $PU = QS = RT$ !
19. Bizonyítsuk be, hogy szabályos ötszög nem helyezhető el térbeli derékszögű koordináta-rendszerben úgy, hogy minden csúcsa rácspont legyen!
20. Adott egy 4 méter élű  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  kocka.
  - a) Mennyi utat kell megtenni egy légynek  $B$ -ből  $D_1$ -be?
  - b) Mennyi utat kell megtenni egy hangyának  $B$ -ből  $D_1$ -be?
21.  $S$  egy konvex poliéder súlypontja.  $S$ -ből merőlegest állítunk minden lap síkjára. Mutassuk meg, hogy valamelyik merőleges talppontja rajta van a megfelelő lapon.
22. Egy konvex poliéder belsejében adott egy tetszőleges pont. Ebből merőlegest állítunk minden lap síkjára. Mutassuk meg, hogy valamelyik merőleges talppontja rajta van a megfelelő lapon.
23. Egy sík metsz egy kockát, de nem illeszkedik egyetlen csúcsra sem. Hány lapot metszhet?
24. Hány oldalú szabályos sokszögben metszhet egy sík egy kockát?
25.  $A$  az északi szélesség  $70^\circ$ , nyugati hosszúság  $10^\circ$ -án,  $B$  az északi szélesség  $70^\circ$ , keleti hosszúság  $175^\circ$ -án van. Merre halad a földgömbön a legrövidebb út  $A$ -ból  $B$ -be?
  - a) pontosan kelet felé,
  - b) pontosan nyugat felé,
  - c) pontosan az Északi Sarkon át,
  - d) egyik előbbi irányban sem.
26. Mutassuk meg, hogy 4 alkalmas gömbbel eltakarható egy pontszerű fényforrás!

## Források

Katz-Jakab: Térgeometriai feladatok