Gráfok

Erdős Gábor és Dobos Sándor feladatsoraiból összeollózva

1. Alapfogalmak

1.1 Egy tábori pingpongversenyre öt gyerek jelentkezett. Körmérkőzéses tornát rendeznek számukra, vagyis mindenki mindenkivel egyszer játszik. András, Béla és Cili 4 mérkőzésen vannak túl eddig, Dezső és Erika 3-on. Hány mérkőzést játszottak eddig összesen?

1.2 Rajzolj olyan gráfot, melyben az egyes pontok fokszámai rendre…

a) 1, 2, 2, 3, 5, 5
b) 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7
c) 3, 3, 3, 3, 5, 6, 6, 6
d) 1, 1, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 8, 9 (egyszerű gráfot!)

1.3 Graffy úr estélyt ad, melyen a vendéglátó házaspáron kívül még 4 házaspárt hívnak meg. Az estély kezdetén az ismerősök kézfogással köszöntik egymást. Graffy úr megfigyeli, hogy rajta kívül mindenki különböző számú emberrel fogott kezet. Hány emberrel fogott kezet Mrs. Graffy?

1.4 A tábori pingpongversenyre 6 gyerek jelentkezett, és a körmérkőzéses tornát egy asztalon bonyolítják le. Mennyi ideig tart a verseny, ha egy mérkőzésre 15 percet számolhatunk? Igazoljuk, hogy minden lejátszott mérkőzés után van két olyan játékos, aki ugyanannyi mérkőzésén van már túl! (Bajnokság fordulói.)

1.5 Rajzold le az összes…

a) 5-pontú egyszerű gráfot, amelynek 3, illetve 7 éle van?
b) 5-pontú egyszerű gráfot, melyben minden pont foka legalább 3!
c) lényegesen különböző 4-pontú egyszerű gráfot!

1.6 Egy körmérkőzéses sakkbajnokságra n játékos nevezett. A bajnokságból már $n+1$ mérkőzést lejátszottak. Bizonyítsuk be, hogy van olyan játékos, aki már legalább 3 mérkőzését lejátszotta!

1.7 JÁTÉK: Adott a síkon egy szabályos 10-szög 10 csúcsa. Ketten felváltva kötik össze a pontokat, egy lépésben két még nem összekötött pontot kell egy egyenes szakasszal összekötni úgy, hogy az összekötő szakasz semelyik korábban behúzott szakaszt nem metszheti annak semelyik belső pontjában. Az veszít, aki már nem tud lépni.
Kinek van nyerő stratégiája? Mi a helyzet szabályos 11-szög esetén?

1.8 (Chvatal) Egy múzeum egyik kiállítótermének alaprajza n oldalú konkáv sokszög. Legalább hány őr kell ahhoz, hogy mindegyik falfelületet szemmel tarthassák? (Az őrök nem sétálnak, de körbefordulhatnak.)

1.9 (Sperner lemma) Egy háromszög belsejében és oldalain elhelyeztünk néhány pontot, majd ezek felhasználásával háromszögekre bontottuk. Minden pontot három szín valamelyikével megfestettünk úgy, hogy az eredeti háromszög csúcsai különböző színűek és a háromszög egy oldalán csak az oldal végpontjainak színét használjuk. Bizonyítsuk be, hogy van olyan "kisháromszög", melynek csúcsai különböző színűek! (Tudnál általánosítani?)

1.10 (B.3662) Van egy zsebrádiónk, amely két ceruzaelemmel működik. A fiókban van 8 ceruzaelemünk, közülük 4 ki van merülve. A jó és rossz elemek sajnos összekeveredtek. Az elemek tesztelésére nincs más lehetőségünk, mint hogy belehelyezünk kettőt a készülékbe, és ha az szól, akkor mindkét elem jó, ha nem szól, akkor legalább az egyik rossz. Legalább hány kísérletre van szükség ahhoz, hogy biztosan megszólaljon a rádió?

2. Utak, körök, fák

2.1 Bizonyítsuk be, hogy ha $2n$ számú telefonközpont mindegyikének van a többiek közül legalább n-nel összeköttetése, akkor bármely két központ között létesíthető telefonkapcsolat, esetleg többük közvetítése révén!

2.2 Ha egy egyszerű gráfnak legalább $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1$ éle van, akkor összefüggő.

2.3 Egy ország városairól azt tudjuk, hogy bármely kettő között van közvetlen légijárat, melyet az Air, vagy a Fly társaság üzemeltet. Mutassuk meg, hogy megszüntethető az egyik társaság összes járata, s mégis bármely városból eljuthatunk bármely másikba a megmaradt járatokkal (több átszállás is lehet)! (G vagy $\overline{G}$ összefüggő)

2.4 Bizonyítsuk be, hogy n számú telefonközpont közül bármely két központ között létesíthető legyen telefonkapcsolat, akkor legalább n-1 darab, két központot közvetlenül összekötő vonalat kell létesíteni! (Fa éleinek száma.)

2.5 Bizonyítsuk be, hogy ha egy összefüggő gráf bármely körének egy tetszőleges élét töröljük, akkor ismét összefüggő gráfot kapunk!

2.6 Bizonyítsuk be, hogy ha egy n-pontú gráfnak legalább n éle van, akkor van a gráfban kör!

2.7 Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráfban minden pont foka legalább 2, akkor van benne kör!

2.8 Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráfban minden pont foka legalább 3, akkor van benne páros hosszú kör! (Leghosszabb út módszere.)

2.9 Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráfban minden pont foka legalább 3, akkor nincs olyan 2-nél nagyobb egész szám, amivel minden körének hossza osztható!

2.10 Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráfban minden pont foka legalább 3, akkor tartalmaz kört húrral!

2.11 Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyszerű gráfnak $n \geq 4$ pont esetén legalább $2n$-3 éle van, akkor tartalmaz kört húrral!

2.12 Hány 5-pontú fa van, ha egy végpont ki van jelölve gyökérnek? Mi a helyzet számozott fák esetén? (Cayley : n^{n-2})

2.13 Egy összejövetelen 21 gyerek vett részt. Mindegyiktől sorra megkérdeztem, hány osztálytársa van a jelenlévők között. az első 13 válaszoló közül öten mondtak hármat, nyolcan négyet. Hány osztálytársa van jelen a többi gyereknek, ha azt tudjuk, hogy mindegyiküknek volt jelen legalább egy osztálytársa? (Komponensek.)

2.14 JÁTÉK: Adott a síkon 6 pont, ezek egy gráf csúcsai. Ketten felváltva éleket húznak be. Az nyer, akinek a lépése nyomán a gráf összefüggő lesz. Kinek van nyerő stratégiája?
(A játék gráfja felrajzolható.)

3. Extrém gráfok, Ramsey problémakör

3.1 Bizonyítsuk be, hogy 6 ember között biztosan van vagy 3 olyan, akik ismerik egymást, vagy 3 olyan, akik nem ismerik egymást! ($R(3,3) = 6$)

3.2 17 tudós levelez egymással 3 témakörben. Mindegyik tudós mindegyik másikkal levelez a három téma egyikéről. Bizonyítsuk be, hogy lehet találni 3 olyan tudóst, akik egymással ugyanarról a témáról beszélgetnek! ($R(3,3,3) = 17$)

3.3 Adott a síkon 6 általános helyzetű pont, bármely kettő távolsága különböző. A pontokat egyenes szakaszokkal összekötjük, majd minden háromszögben a leghosszabb oldalt h, a legrövidebbet r betűvel jelöljük. Bizonyítsuk be, hogy van olyan szakasz, amelyre h és r betű is van írva!

3.4 Lehet-e 5 egész számot megadni úgy, hogy bármelyik 3 között legyen 2, melyek relatív prímet, és legyen 2, melyek nem azok? Mi a helyzet 6 szám esetén?

3.5 Igaz-e, hogy 6 darab irracionális szám között mindig van 3 olyan, hogy közülük bármely 2 összege irracionális?

3.6 Egy társasutazás bármely 4 résztvevője között van olyan, aki a másik 3 mindegyikét régről ismeri. Bizonyítsuk be, hogy ekkor bármely 4 résztvevő között van olyan, aki már minden útitársával találkozott korábban is! (A komplementer gráfon egyszerű a kérdés.)

3.7 Egy baráti találkozó 9 résztvevője közül bármely 3-at tekintve, van köztük 2, akik kezet fogtak. Igazoljuk, hogy van 4 olyan ember, akik mindannyian kezet fogtak egymással! ($R(3,4) = 9$)

4. Síkgráfok

4.1 Ebben a feladatban olyan testekkel dolgozunk, amelyeknek csak az élei vannak meg, azok pedig gumiból készültek. A testeket megpróbáljuk úgy síkba lapítani, hogy éleik ne keresztezzék egymást. Elvégezhető-e ez a deformáció, ha az eredeti test…

a) egy kocka?

b) két egyforma, lapszomszédos kocka?

c) egy élhez csatlakozó három egyforma kocka?

d) egy élhez csatlakozó négy egyforma kocka?

(Kuratowski tétel: K_5 és $K_{3,3}$ okozza a nemsíkbarajzolhatóságot.)

4.2 Milyen összefüggés van a síkgráfok csúcsai, élei és a körülzárt tartományok (lapok) között? (Euler féle poliéder tétel, gömbrerajzolhatóság)

4.3 Egy háromszög belsejében vegyünk fel 6 darab általános helyzetű pontot. Bontsuk fel a háromszöget kis háromszögekre úgy, hogy minden kis háromszög csúcsai a háromszög csúcsai és a 6 belső pont közül kerüljenek ki. Mit mondhatunk a keletkezett kis háromszögek számáról?

4.4 Egy körlap kerületén vegyünk fel n pontot, majd mindegyiket mindegyikkel kössük össze egyenes szakasszal. Legfeljebb hány részre osztották a szakaszok a körlemezt?

4.5 Bizonyítsuk be, hogy egy n pontú, egyszerű síkbarajzolható gráfnak legfeljebb $3n$-6 éle van! (Lapok legalább háromoldalúak + Euler tétel.)

4.6 JÁTÉK: Adott a síkon egy szabályos ötszög 5 csúcsa. Két játékos felváltva köti össze az éleket síkgörbével, miközben egyetlen már behúzott élet sem szabad metszeniük. Az veszít, aki már nem tud újabb élet behúzni. Kinek van nyerő stratégiája?

5. Reguláris gráfok, faktorok

5.1 Egy focibajnokságban 18 csapat játszik körmérkőzést. Bizonyítsuk be, hogy 8 teljes forduló után lesz 3 olyan csapat, amelyek még nem játszották le egyetlen egymás elleni meccsüket sem!

5.2 Egy focibajnokságban minden csapat eddig 3 mérkőzést játszott. Legalább hány csapat indult a bajnokságban, ha nincs 3 olyan csapat, akik minden egymás elleni meccsüket már lejátszották volna?

5.3 Az Ötörvény szigetvilágban kompok bonyolítják le a forgalmat, melyek két sziget között oda-vissza közlekednek. Mindegyik szigetről 3 másikra indul komp. A járatok úgy vannak kialakítva, hogy ha valaki körutazásra vágyik, és egyetlen kompra sem szeretne közben kétszer felszállni, akkor legalább 5 komppal kell utaznia. Legalább hány szigetből áll az Ötörvény szigetvilág?

5.4 Egy légitársaság ingajáratokat közlekedtet néhány város között úgy, hogy egy városból nem lehet háromnál több másikba közvetlenül eljutni. Legfeljebb egy átszállással viszont már eljuthatunk bárhonnan bárhova. Legfeljebb hány város között járnak a gépek?

5.5 Bontsuk fel a Petersen-gráfot három elsőfokú faktorra!

5.6 Vizsgáljuk meg 6 csapat közötti körmérkőzéses bajnokságokat!
a) Hány mérkőzésből áll egy bajnokság?
b) Hány fordulót kell szervezni?
c) Hányféle forduló lehetséges?
d) Előttünk egy forduló terve. Hány forduló nem tartalmaz ezzel közös meccset?
e) Hány olyan bajnokság van, amelyben szerepel 2 adott, közös mérkőzést nem tartalmazó forduló?
f) Hány bajnokságban szerepel egy adott forduló?
g) Hány különböző bajnokság van?
h) Két különböző bajnokságban hány közös forduló van?