

# Területszámítás

*Jakab Tamás és Katz Sándor válogatása, Orosz Gyula feladatával kiegészítve*

- 12 gyufából egész területű síkidomokat állítunk össze. (Minden gyufát fel kell használni.) Milyen egész számok kaphatók meg területértékként?
- Egy konvex négyszöget középvonalai négy részre osztanak. Mutassuk meg, hogy ezek közül két-két szemközti területének összege egyenlő!
- Egy négyszög egyik átlója felezi a négyszög egyik középvonalát. Mutassuk meg, hogy ez az átló a négyszög területét is felezi!
- Egy konvex négyszöget átlói négy háromszögre bontanak. Mind a négy háromszög területének a mértéke egész szám. Igazoljuk, hogy ennek a négy egész számnak a szorzata nem végződik 2008-ra!
- Az  $ABCD$  konvex négyszög átlóinak metszéspontja  $M$ . Az  $AMD$ ,  $AMB$ ,  $CMB$  háromszögek területe rendre 6, 10, 6 egység. Igazoljuk, hogy az  $ABCD$  négyszög trapéz! Mekkora a négyszög területe?
- Az  $ABCD$  és  $AEFG$  paralelogrammák úgy helyezkednek el a síkban, hogy az  $A$  csúcsuk közös, továbbá  $E$  illeszkedik a  $BC$  oldalra,  $D$  pedig az  $FG$  oldalra. Igazoljuk, hogy a két paralelogramma területe egyenlő!
- Az  $ABC$  háromszög belsejében levő  $O$  ponton át párhuzamosokat húzunk az oldalakkal, így három trapézt kapunk. Megrajzoljuk ezen trapézok egy-egy átlóját úgy, hogy azoknak ne legyen közös végpontja. Ezek az átlók 7 részre vágják az  $ABC$  háromszöget, 4 háromszögre és 3 négyszögre. Mutassuk meg, hogy ezek közül három olyan háromszög területének összege, amelynek egyik oldala az  $ABC$  háromszög oldalain van, egyenlő a negyedik háromszög területével!
- Egy háromszög egyik oldala 5 egység, másik oldala 1 egység hosszú. Mekkora lehet legfeljebb a háromszög területe?
- Egy téglalapot három háromszögre vágunk úgy, hogy az egyik háromszög területe fele a másik kettő összegének. Határozzuk meg a három háromszög területének arányát!
- Az  $ABC$  háromszög  $AB$  oldalának felezőpontja  $F$ . A  $CF$  szakasz egy tetszőleges pontja  $P$ . Igazoljuk, hogy az  $APC$  és  $BPC$  háromszögek területe egyenlő!
- Egy háromszöget két súlyvonala három háromszögre és egy négyszögre bont. Mekkora az eredeti háromszög területe, ha a négyszögé  $8 \text{ cm}^2$  ?
- Határozzuk meg az  $ABC$  háromszög belsejében az összes olyan  $P$  pontot, amelyre  $T_{PAB} = T_{PBC} = T_{PCA}$  !
- Egy trapéz kisebb alapja, magassága és nagyobb alapjának hossza cm-ben mérve ebben a sorrendben három egymást követő egész szám. Területe  $120 \text{ cm}^2$  és  $130 \text{ cm}^2$  közé esik. Mekkora legkisebb oldal?
- Egy szabályos háromszög egy belső pontjából merőlegeseket állítottunk az oldalakra és a pontot összekötöttük a csúcsokkal. Így a szabályos háromszöget 6 kis háromszögre bontottuk. Válasszunk ki ezek közül hármat úgy, hogy ne legyen közös oldaluk. Mutassuk meg, hogy ezen a három háromszög területének összege egyenlő a másik három háromszög területének összegével!
- Egy konvex négyszöget átlói négy háromszögre bontanak. Mind a négy háromszög területének a mértéke egész szám. Igazoljuk, hogy ennek a négy egész számnak a szorzata nem végződik 2008-ra!
- Egy hegyesszögű háromszög területe  $t$ . Minden oldal felezőpontjából merőlegest állítunk a másik két oldalra. Mekkora a merőlegesek határolta hatszög területe?
- Az  $ABCD$  téglalap oldalaira kifelé rajzoltuk az  $ABX$ ,  $BCY$ ,  $CDV$ ,  $DAW$  szabályos háromszögeket. Bizonyítsuk be, hogy az  $AXW$ ,  $BXY$ ,  $CVY$ ,  $DWV$  háromszögek területének összege egyenlő a téglalap területével!
- Határozd meg az 5 cm sugarú körbe írt szabályos tizenkétszög területét!

19. Két húrtrapéz (tengelyesen szimmetrikus trapéz) alapjai egyaránt 10 cm és 2 cm.
- Az elsőben a hosszabik alapon fekvő szögek  $45^\circ$ -osak. Mekkora a trapéz területe?
  - A másodikban a hosszabik alapon fekvő szögek  $60^\circ$ -osak. Mekkora a trapéz kerülete?
20. Mekkora a területe annak a tengelyesen szimmetrikus trapéznek (húrtrapéznek) amelyről azt tudjuk, hogy
- két alapja 6 cm és 14 cm, szára 5 cm;
  - két alapja 6 cm és 14 cm, és átlói merőlegesek egymásra.
21. Kössük össze egy konvex négyszög szemközti oldalfelező pontjait, így négy kisebb négyszöget kapunk, Igazoljuk, hogy
- a négy kis négyszög területének összege legfeljebb az eredeti négyszög területének kétszeresével egyenlő.
  - Kék-két szemközti kis négyszög területnek összege egyenlő.
  - A négy kis négyszögből paralelogrammát lehet összeállítani.
22. Egy húrtrapéz alapjai 12 és 20, átlói merőlegesek. Mekkora a területe?
23. Egy húrtrapéz középvonala 16 cm, a trapéz átlói merőlegesek egymásra. Mekkora a trapéz területe?
24. Melyiknek nagyobb a területe: az 1 területű négyzetbe írt köré, vagy az 1 területű körbe írt négyzeté?
25. Két metsző kör három korlátos részt határol a síkban. Mutassuk meg, hogy nincs olyan harmadik kör, amely mindhárom területet felezné.
26. Az  $ABCD$  konvex négyszög átlóinak metszéspontja  $E$ . Az  $AEB$  és  $CED$  háromszögek területe egyaránt  $1 \text{ cm}^2$ . Mutassuk meg, hogy a négyszög területe nem kisebb  $4 \text{ cm}^2$ -nél! Igazoljuk, hogy a négyszög trapéz, és ha területe  $4 \text{ cm}^2$ , akkor paralelogramma!
27. Egy konvex négyszög  $A$  és  $B$  csúcsánál derékszög van, míg  $D$ -nél  $45^\circ$ -os szög.  $BC = 1$  és  $BD = 5$ . Mekkora a terület?
28. Egy háromszög területének egy  $P$  pontján át szerkesszünk egyenest, amelye a háromszög területét két egyenlő részre osztja!
29. Egy négyszög egy csúcsán át szerkesszünk egyenest, amelye a négyszög területét két egyenlő részre osztja!
30. Az  $ABC$  háromszög  $AB$  oldalának  $K$  az a pontja amelyre  $AK : KB = 3$ . Hol vegyük fel a háromszög területén a  $D$  pontot, hogy a  $KD$  szakasz felezze a háromszög területét?
31. Az  $ABC$  háromszög területe  $T$ , az  $AM$  súlyvonal felezőpontja  $K$ . A  $BK$  egyenes  $L$ -ben metszi az  $AC$  oldalt. Mekkora az  $AKL$  háromszög területe?
32. Egy konvex négyszög területe  $32 \text{ cm}^2$ , egyik átlójának és két egymással szemközti oldalának összege 16 cm. Milyen hosszú a négyszög másik átlója?
33. Az  $ABCDE$  szabályos ötszögbe  $ABFG$  téglalapot írunk úgy, hogy  $F$  a  $CD$  oldalra,  $G$  pedig a  $DE$  oldalra illeszkedik. Igazoljuk, hogy az  $AEG$  és  $GFD$  háromszögek területe egyenlő!
34. Egy téglalap területe egyenlő a szögfelezői által határolt négyszög területével. Mekkora a téglalap oldalainak aránya?
35. Egy trapézban berajzoljuk minden oldal harmadolópontjait. Kiválasztunk egyet és összekötjük a következő második harmadolóponttal, és így tovább, így kapunk egy négyszöget ennek a területe hányada a trapéz területének?
36. Egy  $1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$ -es négyzetekből álló négyzetrácsra egy beosztás nélküli egyenes vonalzóval szerkesszünk  $80 \text{ cm}^2$  területű négyzetet!
37. Az  $ABC$  háromszög  $AB, BC, CA$  oldalainak egy-egy belső pontja  $M, K, L$ . Mutassuk meg, hogy az  $MAL, KBM, LCK$  háromszögek közül legalább az egyik területe nem nagyobb a háromszög területének negyedénél!
38. Az  $ABCD$  konvex négyszög átlói a négyszöget négy háromszögre bontják, ezek súlypontjai  $P, Q, R, S$ . Hányadrésze a  $PQRS$  négyszög területe az  $ABCD$  négyszög területének?

39. Egy hatszög minden szöge  $120^\circ$ , oldalai felváltva 1 és  $\sqrt{3}$ . Mekkora a hatszög területe?
40. Az  $ABC$  hegyesszögű háromszög  $AD, BE, CF$  magasságainak metszéspontja  $M$ . Az  $AFME$  és  $CDME$  négyzetek területe egyenlő. Mutassuk meg, hogy a háromszög egyenlő szárú!
41. Az  $ABC$  háromszög  $A$  ill.  $B$  csúcsán áthaladó két egyenes négy részre (3 háromszögre és egy négyszögre) bontja a háromszöget. Mutassuk meg, hogy a négy rész területe nem lehet egyenlő! Melyik 3 rész területe lehet egyenlő, és hányszorosai ezek a területek a negyediknek?
42. Az  $ABCD$  téglalap belsejében adott a  $P$  pont.  $P$ -re illeszkedő az oldalakkal párhuzamos két egyenes négy téglalapra vágja az eredetit. Mutassuk meg, hogy az  $A$  és a  $C$  csúcsot tartalmazó téglalapok területe közül legalább az egyik nem nagyobb az egész negyedénél!
43. Elhelyezhető-e egy lábas egy asztalon úgy, hogy csak aljának  $1/3$  része legyen az asztallapon, mégse billenjen le, abban az esetben, ha az asztallap a) téglalap alakú, b) kör alakú?
44. Egy konvex ötszög alakú torta minden csúcsában van egy gyertya. Igaz-e mindig, hogy van az ötszög belsejében egy olyan pont, hogy abból induló félegyenesekkel a tortát öt egyenlő területű darabra lehet vágni, úgy hogy mindegyiken legyen egy gyertya is?
45. Az  $a$  és a  $b$  oldalakkal rendelkező deltoidba  $r$  sugarú, köré  $R$  sugarú kör írható. Igazoljuk, hogy  $\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ !
46. Mutassuk meg, hogy minden húrnégyszögben  $\frac{1}{e} + \frac{1}{f} = \frac{(a+c)(b+d)}{4Rt}$ !
47. Az  $ABC$  háromszög beírt körének az oldalakkal párhuzamos érintői a háromszögből  $t_a, t_b, t_c$  területű háromszögeket vágnak le. Mutassuk meg, hogy  $\sqrt{t_a} + \sqrt{t_b} + \sqrt{t_c} = \sqrt{t}$ !
48. Az  $ABCD$  négyzet köré írt kör rövidebb  $AB$  ívének egy pontja  $P$ . Mutassuk meg, hogy a  $PCD$  háromszög területe egyenlő a  $PAB, PBC, PAD$  háromszögek területének összegével! Igaz-e ez téglalapban is?
49. Az  $ABCD$  konvex négyszög átlóinak metszéspontja  $O$ . Mutassuk meg, hogy
- ha az  $ABO, BCO, CDO, DAO$  háromszögekbe írható körök sugara egyenlő, akkor a négyszög rombusz
  - ha az  $ABC, BCD, CDA, DAB$  háromszögekbe írható körök sugara egyenlő, akkor a négyszög téglalap!
50. Adott véges sok négyzet, melyek összterülete 1 egység. Mutassuk meg, hogy átfedés nélkül elhelyezhetők egy 2 egység területű négyzetbe!
51. Mutassuk meg, hogy ha néhány négyzet területének összege 4, akkor ezekkel le lehet fedni egy 1 területű négyzetet!