Gráfok 1. – alapfogalmak

1. Egy társaságban öt ember találkozott. Megkérdeztük őket, kinek hány ismerőse van ötük között. A válaszok:

   A: Négy embert ismerek.

   B: Kevesebb ismerősöm van, mint A-nak.

   C: Ugyanannyi ismerősöm van, mint D-nek.

   D: Eggyel kevesebb ismerősöm van, mint E-nek.

   E: Páratlan számú embert ismerek.

   Ismeri-e egymást C és D?

2. Rajzoljunk „térképet", amin 5 város van, a városok között utak.

   a) Az egyes városokból 1,2,2,3,4 út indul. Hány út van a térképen?

   b) Az egyes városokból 1,2,2,3,3 út indul. Hány út van a térképen?

3. Igaz-e, hogy bármely 9 tagú társaságban van olyan ember, akinek páros számú ismerőse van?

4. Van-e olyan tíztagú társaság, amelyben az embereknek rendre

   a) 4,3,3,3,3,3,3,3,3,3;

   b) 9,3,3,3,3,3,3,3,2,0;

   c) 9,3,3,3,3,3,3,3,2,2;

   d) 9,9,9,8,8,8,7,6,4,4

   ismerőse van? (Az ismeretséget kölcsönösnek tételezzük fel.)

5. Egy város telefonközpontjában számon tartják, hogy a központhoz tartozó telefonállomások mindegyikéről hány másikat hívtak fel aznap (ha egy állomást többször is felhívtak, azt is csak egynek számítják). Igaz-e, hogy van két telefonállomás, amelyről ugyanannyit hívtak?

6. Egy társaságban némely emberek kezet fogtak egymással. Igaz-e, hogy mindig van két ember, aki ugyanannyiszor fogott kezet?

7. a) Egy társaságban lejátszottak néhány sakkmérkőzést. Bármely két ember legfeljebb egy mérkőzést játszott egymás ellen. Bizonyítsuk be, hogy mindenképpen volt két olyan ember, aki ugyanannyi emberrel mérkőzött meg.

   b) Igaz marad-e az állítás akkor is, ha megengedjük, hogy két ember többször is mérkőzzön egymással?

8. Egy tábori pingpongversenyre öt gyerek jelentkezett. Körmérkőzéses tornát rendeznek számukra, vagyis mindenki mindenkivel egyszer játszik. András, Béla és Cili 4 mérkőzésen vannak túl eddig, Dezső és Erika 3-on. Hány mérkőzést játszottak eddig összesen?

9. A tábori pingpongversenyre 6 gyerek jelentkezett, és a körmérkőzéses tornát egy asztalon bonyolítják le. Mennyi ideig tart a verseny, ha egy mérkőzésre 15 percet számolhatunk? Igazoljuk, hogy minden lejátszott mérkőzés után van két olyan játékos, aki ugyanannyi mérkőzésén van már túl! (Bajnokság fordulói.)

10. Egy körmérkőzéses sakkbajnokságra n játékos nevezett. A bajnokságból már $n+1$ mérkőzést lejátszottak. Bizonyítsuk be, hogy van olyan játékos, aki már legalább 3 mérkőzését lejátszotta!

11. Egy táncos estén négy fiú és négy lány vett részt. Megkérdeztük a lányokat, hogy hány fiúval táncoltak és a következő válaszokat kaptuk: 3, 1, 2, 2. Megkérdeztük a fiúkat is, hogy hány lánnyal táncoltak és a következő válaszokat adták: 2, 2, 3, 2. Mutassuk meg, hogy valaki nem az igazat mondta!

12. Egy táncos estén 21 fiú és 21 lány vett részt. Minden fiú vagy négy lánnyal vagy két lánnyal táncolt, kivéve egyet, aki hat lánnyal táncolt. Lehetséges-e, hogy minden lány három vagy öt fiúval táncolt?

13. Rajzolj olyan gráfot, melyben az egyes pontok fokszámai rendre...
    a) 1, 2, 2, 3, 5, 5
    b) 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7
    c) 3, 3, 3, 3, 5, 6, 6, 6
    d) 1, 1, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 8, 9 (egyszerű gráfot!)

14. Graffy úr estélyt ad, melyen a vendéglátó házaspáron kívül még 4 házaspárt hívnak meg. Az estély kezdetén az ismerősök kézfogással köszöntik egymást. Graffy úr megfigyeli, hogy rajta kívül mindenki különböző számú emberrel fogott kezet. Hány emberrel fogott kezet Mrs. Graffy?

15. Rajzold le az összes...
    a) 5-pontú egyszerű gráfot, amelynek 3, illetve 7 éle van?
    b) 5-pontú egyszerű gráfot, melyben minden pont foka legalább 3!
    c) lényegesen különböző 4-pontú egyszerű gráfot!

16. JÁTÉK: Adott a síkon egy szabályos 10-szög 10 csúcsa. Ketten felváltva kötik össze a pontokat, egy lépésben két még nem összekötött pontot kell egy egyenes szakasszal összekötni úgy, hogy az összekötő szakasz semelyik korábban behúzott szakaszt nem metszheti annak semelyik belső pontjában. Az veszít, aki már nem tud lépni. Kinek van nyerő stratégiája? Mi a helyzet szabályos 11-szög esetén?

17. (Chvatal) Egy múzeum egyik kiállítótermének alaprajza n oldalú konkáv sokszög. Legalább hány őr kell ahhoz, hogy mindegyik falfelületet szemmel tarthassák? (Az őrök nem sétálnak, de körbefordulhatnak.)

18. (Sperner lemma) Egy háromszög belsejében és oldalain elhelyeztünk néhány pontot, majd ezek felhasználásával háromszögekre bontottuk. Minden pontot három szín valamelyikével megfestettünk úgy, hogy az eredeti háromszög csúcsai különböző színűek és a háromszög egy oldalán csak az oldal végpontjainak színét használjuk. Bizonyítsuk be, hogy van olyan "kisháromszög", melynek csúcsai különböző színűek! (Tudnál általánosítani?)

19. (B.3662) Van egy zsebrádiónk, amely két ceruzaelemmel működik. A fiókban van 8 ceruzaelemünk, közülük 4 ki van merülve. A jó és rossz elemek sajnos összekeveredtek. Az elemek tesztelésére nincs más lehetőségünk, mint hogy belehelyezünk kettőt a készülékbe, és ha az szól, akkor mindkét elem jó, ha nem szól, akkor legalább az egyik rossz. Legalább hány kísérletre van szükség ahhoz, hogy biztosan megszólaljon a rádió?

Források

- A `matek.fazekas.hu` oldalon található „Matkönyv” feladatgyűjtemény feladatai.
- Erdős Gábor és Dobos Sándor feladatsorai