

I. rész

Számológép nem használható, minden feladat négy pontot ér.

1. Legyenek A és B a következő halmazok!

$A := \{\text{a 12-nél kisebb pozitív egészek, melyeknek páratlan osztója van}\},$

$B := \{x \text{ egész szám és } |x - 6| < 3\}.$

Írja fel elemeivel az A és B halmazok metszetét, unióját és különbségét!

2. Oldja meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $x^2 - \frac{3x^2 + 1}{4} = 2$

b) $x^2(x + 3) = 4(x - 1)(x + 3)$

3. Tomi a $\{12; 13; 14\}$ halmaz két elemét véletlenszerűen kiválasztja, és veszi ezek összegét. Karcsi a $\{2; 3; 5; 8\}$ halmazból választ ugyancsak véletlenszerűen kettőt, és összeszorozza őket. Mekkora a valószínűsége, hogy Karcsi eredménye kisebb?

4. Határozza meg a következő kifejezések pontos értékét és állítsa növekvő sorrendbe az eredményeket!

$A = 10$ pozitív osztói reciprokanak összege

$B = \frac{11}{3}$ és $\frac{5}{6}$ számtani közepe

$$C = \frac{12 \cdot 10^{-20}}{3 \cdot 10^{-19}}$$

$$D = \frac{8^{11}}{16^8}$$

$$E = \left(\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) : \frac{13}{4} \right)^{-1}$$

5. Hányféle módon választható ki egy szabályos tizenkétszög csúcsai közül egy háromszög három csúcsa?
6. Egy erdő faállománya jelenleg 8000 fa. Minden évben kivágják az állomány 20%-át, de 800 új fát is ültetnek. Hány fából állt az ültetvény 2 évvel ezelőtt?
7. Egy trapéz alapjainak hossza 9 cm és 13 cm, magassága 4 cm. Mekkora területű részekre vágja a trapézt a középvonala?
8. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelynek kétszerese négyzetszám, és a háromszorosa köbszám?
9. Az $ABCD$ négyzet DC oldalára kifelé megrajzoltuk a DCE szabályos háromszöget. Mekkora az ABE háromszög szögei?
10. A p és $p + 2$ prímelek ($p > 3$). Határozza meg $p + 4$ egyik valódi osztóját!

II. rész

Minden feladat 12 pontot ér. A hat feladat közül ötöt kell megoldani.

11. Egy atlétikai szakosztályban a 100 m-es síkfutók, a 200 m-es síkfutók és a váltófutók összesen 29 fős csoportjával egy atlétaedző foglalkozik. Mindegyik versenyző legalább egy versenyszámra készül. A 100 m-es síkfutók tizenötven vannak; hét versenyző viszont csak a 100 méterre edz, négy versenyző csak 200 méterre, hét versenyző csak váltófutásra. Azt is tudjuk, hogy bármelyik két futószámnak pontosan ugyanannyi közös tagja van. Mennyi ez a szám?
12. Hány olyan hatpontú egyszerű gráf van, amelyben a fokszámok 1,1,1,2,3,4?
13. Zalasabarban turisztikai fejlesztés zajlik. A kalandpark után egy kis állatkertet is létrehozna. A bővítéshez a Szabar-patak mentén szeretnék bekeríteni egy téglalap alakú telket. A téglalap egyik oldala a patak, itt nem lesz kerítés. A patakkel párhuzamos oldalon építendő kerítés költsége, 6000 Ft/m, a másik két oldalon 4500 Ft/m. A kerítésre 1 800 000 Ft-ot tudnak szánni. Ahhoz, hogy az állatok a minél jobban érezzék magukat, a lehető legnagyobb telket szeretnék elkeríteni a fenti feltételek mellett. Milyenek legyenek a téglalap méterei, hogy ez sikerüljön?
14. A k_1 és k_2 körök két metszéspontja A és B . B tükörképe a körök középpontjára X és Y . Bizonyítsuk be, hogy A , X és Y egy egyenesre esnek!
15. A mosogatógépinkön háromféle program van. Egy mosogatáshoz az A program 20%-kal több elektromos energiát, viszont 10%-kal kevesebb vizet használ, mint a B program. A B program 30%-kal kevesebb elektromos energiát és 25%-kal több vizet használ egy mosogatáshoz, mint a C program. Mindhárom program futásakor 40 Ft-ba kerül az alkalmazott mosogatószer. Egy mosogatás az A programmal 151 Ft-ba, a B programmal 140 Ft-ba kerül.
Mennyibe kerül a C programmal egy mosogatás?
16. Három szabályos sokszög hézagmentesen és átfedés nélkül összeilleszthető egyik csúcuknál. Hány oldaluk lehet a szabályos sokszögeknek?